Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Фізичний факультет

Романенко О.В.

Додаткові розділи класичної механіки: Кватерніони

Методична розробка
для студентів фізичного факультету

Київ 2019

Упорядник:

Романенко Олександр Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор ***Макарець М.В.***

доктор фіз.-мат. наук, доцент ***Ледней М.Ф.***

Передмова

Дана методична розробка є додатковим матеріалом до підручника [1] з нормативної дисципліни "Класична механіка", яка викладається студентам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Розробка присвячена вступу до властивостей кватерніонів, які широко використовуються у теорії руху абсолютно твердого тіла і буде корисною студентам, яким потрібно ознайомитись зі спеціалізованою літературою. Також стисло викладено геометричні властивості кватерніонів та їх матричне представлення, яке використовується у теорії спіна у квантовій механіці та у квантовій теорії поля.

Київ, 2019

Кватерніони

Кватерніони було введено Гамільтоном у 50-х роках XIX століття [1] як узагальнення ідеї комплексного числа, однак у 80-х роках XIX століття відомий фізик Гіббс показав, що вони однозначно відповідають алгебраїчним властивостям тривимірних векторів. Більш того, операція множення кватерніонів прямо відповідала новій на той час операції векторного добутку. Саме тоді і було означено звичні зараз векторний та скалярний добутки, і більшість фізичних законів були сформульовані у векторному вигляді.

Не зважаючи на природність та інтуїтивну простоту векторної форми запису співвідношень, кватерніонна форма інколи зручніша, особливо у проміжних обчисленнях. У класичній механіці її можна застосовувати у випадках, коли розглядається перетворення повороту системи координат відносно довільної осі. На відміну від матриці переходу, яка складається з косинусів кутів між осями старої та нової системи координат, кватерніонний варіант перетворення у явній *формі включає інформацію про вісь та кут повороту. Зокрема, у механіці абсолютно твердого тіла як орієнтаційні координати можна використати матриці повороту на кути Ейлера у кватерніонній формі (інакше кажучи, параметри Келі-Клейна).*

За своєю природою кватерніони є чотиривимірними об'єктами, що дозволяє сформулювати механіку теорії відносності у простій та компактній формі. Для тривимірної механіки Ньютона також можна застосувати кватерніонний формалізм, але у більшості випадків зручніше користуватися евклідовими векторами як базовими об'єктами.

У цьому додатку дається означення кватерніонів та розглядаються їх основні властивості. Наведений огляд жодним чином не претендує на математичну строгість, його мета — поверхневе ознайомлення та тому рівні, на якому кватерніонний формалізм можна використовувати у елементарних задачах теоретичної фізики (на так званому "фізичному рівні строгості"), зокрема у класичній та релятивістській механіці. Щоб не заглиблюватись у математичний бік теорії, будемо обережно використовувати псевдотерміни "співставлення" і "відповідність" для відображень множин та просторів замість прийнятих у математичній літературі гомео-, ізоморфізмів та інших, точніших за змістом понять. Більш послідовний і строгий виклад та аналіз широкого кола задач (які тут не розглядаються) можна знайти в наведеній літературі.

Для зручності спочатку згадаємо формальне означення комплексного числа як надбудову над полем дійсних чисел, і потім за тією самою схемою означимо кватерніони.

Література для додаткового читання: [2], [3], [4], [5], [6].

---

1. Комплексні числа. Комплексним числом z називається впорядкована пара[2] дійсних чисел (x, y) з наступними операціями додавання та множення на дійсні числа:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

а також та внутрішнього множення

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \tag{2}$$

[1] W. Hamilton, 1843.
[2] Тобто два елементи, для яких вказаний порядок, змінювати який не можна.

Комплексні числа утворюють *поле* $\mathbb{C}$. Із означення випливає комутативність операцій додавання та множення:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1\,,$$

їх асоціативність:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3\,, \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\,,$$

а також дистрибутивність:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_2 z_3\,.$$

Число $x \in \mathbb{R}$ називається *дійсною* частиною числа $z \in \mathbb{C}$, а $y \in \mathbb{R}$ — *уявною*. Беручи до уваги властивості операції додавання, розіб'ємо число z на дві частини:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)\,. \tag{3}$$

Числа $(1, 0)$ та $(0, 1)$ є базисними елементами на множині $\mathbb{C}$. Оскільки для чисел вигляду $(x, 0)$ добуток є числом того самого типу, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, то такі числа утворюють поле, а операції додавання та множення повністю збігаються з аналогічними операціями для дійсних чисел, тому $(x, 0)$ можна ототожнити з дійсним числом $x \in \mathbb{R}$. Зокрема, базисний елемент $(1, 0)$ ототожнюється з дійсним числом 1 і називається *дійсною одиницею*. Другий базисний елемент $(0, 1)$ позначається i й називається *уявною одиницею*. Розклад числа z по базисних елементах множини $\mathbb{C}$ називається *алгебраїчною формою запису* комплексного числа:

$$z = x + iy\,. \tag{4}$$

Операції множення можна означити за допомогою базисних елементів

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 0)\,, \quad (1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1)\,, \quad (0, 1) \cdot (0, 1) = -(1, 0)\,, \tag{5}$$

або

$$1 \cdot 1 = 1^2 = 1\,, \quad 1 \cdot i = i\,, \quad i \cdot i = i^2 = -1\,,$$

а потім поширити на довільні числа за допомогою дистрибутивного закону множення (який дає правило розкривання дужок) та властивостей операції додавання:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Так само, як і для дійсних чисел, у алгебрі комплексних чисел можна задати поняття модуля числа (довжини, норми) та означити операцію ділення. Для цього введемо операцію спряження числа z, для якої немає аналога у множині $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} {}^* : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\,, \\ z &\to z^* = (x + iy)^* = x - iy\,, \end{aligned}$$

спряження зводиться до зміни знаку уявної одиниці. На рівні базису спряження означає:

$$1^* = 1\,, \quad i^* = -i\,,$$

спряження дійсного числа x збігається з x, тому за своїм означенням така операція стосується тільки уявних частин.

Очевидно, операція спряження комутує з операціями множення та додавання:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \,, \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Добуток числа z на спряжене z^* є дійсною величиною, що можна показати явно:

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \,,$$

за аналогією з дійсними числами *модулем комплексного числа* називається величина $|z|$, означена як

$$|z|^2 = z \cdot z^* \quad (\text{для дійсних чисел } |x|^2 = x \cdot x). \tag{6}$$

Легко перевірити, що для такого означення виконуються всі стандартні властивості модуля як довжини, зокрема нерівність трикутника $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Крім того,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \,. \tag{7}$$

За допомогою операції спряження можна отримати вираз для числа z^{-1}, оберненого до z, яке означене як

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1 \,.$$

домножаючи обидві частини рівності на z^* ліворуч, отримаємо:

$$z^* \cdot (z \cdot z^{-1}) = (z^* \cdot z) \cdot z^{-1} = |z|^2 \, z^{-1} = z^* \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \,, \tag{8}$$

тобто обернення числа можна означити для у всіх випадках, крім $z = (0, 0)$.

У теоретичній фізиці, навіть у таких "суто дійсних" теоріях, як ньютонівська механіка (де з самого початку є тільки дійсні величини), комплексні числа широко і успішно використовуються, не тільки тоді, коли вони виникають природним чином (тобто у процесі розв'язку рівнянь типу $x^2 = -1$), а і у випадках, коли можна скористатись їх геометричною інтерпретацією.

2. Комплексні числа та евклідова геометрія. Кожному комплексному числу можна співставити точку декартової площини $\mathbb{R}^2$ з координатами (x, y), яка теж є впорядкованою парою дійсних чисел. Якщо комплексному числу $z = (x, y)$ відповідає вектор $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, то сумі чисел $z_1 + z_2$ відповідатиме вектор $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Для побудови аналогії добутку $z_1 z_2$ у просторі векторів можна перейти до полярних координат (r, φ) у площині xy, тоді

$$x = r \cos\varphi \,, \quad y = r \sin\varphi \,,$$

і записати комплексне число z у тригонометричній формі

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \,, \quad r^2 = |z|^2 = x^2 + y^2 \,. \tag{9}$$

Для числа одиничної довжини (з $r = 1$) можна користуватись формулою Ейлера

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi} \,,$$

це породжує експоненційну форму запису у загальному випадку:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}\,. \tag{10}$$

Тоді добуток $z_1 z_2$ можна записати так:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = re^{i\varphi}\,, \quad r = r_1 r_2\,, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

тобто добутку $z_1 z_2$ відповідає вектор з довжиною $r_1 r_2$ та кутом $\varphi_1+\varphi_2$ (сумарним).

Серед лінійних операцій векторного аналізу та лінійної алгебри немає операції з двома векторами, яка приводить до такого результату за винятком випадку, коли модуль одного з множників дорівнює одиниці. Дійсно, добуток комплексних чисел $z_\alpha = e^{i\alpha}$ та $z = re^{i\varphi}$, який має вигляд

$$z_\alpha \cdot z = re^{i(\varphi+\alpha)}\,,$$

результат добутку можна інтерпретувати як вектор, який отримано з $\vec{r}$ поворотом на кут α навколо початку координат проти годинникової стрілки.

Для векторів це перетворення записується у матричній формі:

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathbf{A}\vec{r}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

або, після обчислення добутку:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha\,, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Відповідне комплексне число в термінах полярних координат матиме вигляд:

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= r(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) + ir(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) \\ &= r\big[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\big] = re^{i(\varphi+\alpha)}\,. \end{aligned}$$

Слід підкреслити, що аналогія між двовимірними векторами та комплексними числами не є повною хоча б за тією причиною, що для векторів не можна означити операцію ділення, тим більше, що операція множення у них просто відсутня — алгебраїчним добутком векторів як елементів поля має бути вектор (у $\mathbb{R}^2$ є тільки скалярний добуток, який є числом, а не вектором — це суто геометричне, а не алгебраїчне поняття, яке фактично задає кут між векторами). Схожість в основному спирається на однакові операції покомпонентного додавання.

3. Узагальнення комплексних чисел. Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ за своєю структурою є більш багатим, ніж простір $\mathbb{R}^2$, саме через означену операцію множення. Серед комплексних чисел є не тільки самі вектори (x, y) з $\mathbb{R}^2$, а і об'єкти, які визначають ортогональні перетворення (повороти) у площині xy. Дія повороту зводиться у множини $\mathbb{C}$ до операції множення, *яку задано у цій же множині*.

Поворот не можна означити в термінах одних тільки векторів, оскільки матриці поворотів є зовнішніми по відношенню до елементів множини $\mathbb{R}^2$ об'єктами. Операція множення векторів на матрицю якраз і компенсує відсутність операцій множення та ділення самих векторів (операцію ділення для матриць можна розуміти як множення на обернену матрицю).

Із останнього зауваження можна зрозуміти, за рахунок чого, власне, відбулося узагальнення після переходу від векторів до комплексних чисел. Як множини, простори $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{C}$ тотожні, оскільки будуються за допомогою одного набору елементів декартового добутку $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (впорядкованих пар), але суттєво відрізняються за математичною структурою. Остання задається *операціями* на множині.

Дійсно, простір $\mathbb{R}^2$ є лінійним простором, оскільки в ньому задано операцію додавання та множення на число. Окрім лінійних операцій у ньому задано також евклідову структуру за допомогою операції скалярного добутку (лінійний простір $\mathbb{R}^2$ з евклідовою структурою перетворюється на евклідовий простір). Простір $\mathbb{C}$ також є лінійним простором, але на ньому задається не евклідова, а мультиплікативна структура, тобто операція добутку (алгебраїчного, добуток елементів $\mathbb{C}$ — знову елемент $\mathbb{C}$), яка перетворює множину $\mathbb{C}$ у поле. Зауважимо, що вихідний простір $\mathbb{R}$, з якого будуються $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{C}$ через декартів добуток та доозначення операцій, є полем.

Зауваження. У просторі $\mathbb{C}$ можна ввести евклідову структуру, яка збігається за формою з $\mathbb{R}^2$:

$$(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\,(z_1^* z_2 + z_1 z_2^*) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \equiv \vec{r}_i \cdot \vec{r}_2\,,$$

але, на відміну від $\mathbb{R}^2$, наочної форми "теореми Піфагора" такий скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}$, звичайно, не передбачає (як і зображення "кута" між комплексними числами). ⌟

Зауваження. На множині $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ можна означити добуток інакше, наприклад для дійсної одиниці взяти знову $(1,0)^2 = (1,0)$ і

$$(0,1)^2 = (1,0) \quad \text{або} \quad (0,1)^2 = (0,0)$$

для уявної. Отримана множина називається множиною подвійних та дуальних чисел відповідно. Однак у цих множинах не можна означити обернений елемент, тому вони не являють особливого інтересу для теоретичної фізики. ⌟

Задача 1. Побудувати множини подвійних та дуальних чисел, означити в них добутки за допомогою правил множення базисних елементів (за аналогією з комплексними числами).

Викладені вище спостереження наводять на думку, що процедуру отримання нового простору з лінійних просторів A та B можна сформулювати так:

1) Задати декартів добуток $C = A \times B$ як набір впорядкованих пар $c = (a, b)$.
2) Перенести лінійні операції над $a \in A$ та $b \in B$, які означені у окремих просторах на елементи $(a, 0)$ та $(0, b)$ і поширити на всі елементи $c = (a, b)$
3) Якщо у просторах A та B є операція множення, то задати операцію множення у просторі C, використовуючи вже існуючі добутки в A та B причому так, що $c_1 \cdot c_2 \in C$. Тоді множина C стає полем.
   Інший варіант — задання евклідової структури на C, якщо простори A та B евклідові. Тоді множина C стає евклідовим простором.

Очевидно, найпростішим узагальненням комплексних чисел за цією процедурою є задання операції добутку на просторах типу $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ тощо, для певного способу означення добутку будуть отримані *гіперкомплексні числа*. На перший погляд здається, що простір $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ після належного доозначення добутку буде аналогічним $\mathbb{R}^3$ і відповідатиме діям з тривимірними векторами, але при детальному розгляді виявляється, що це не так. У отриманій множині, незалежно від того, як означено добуток, у загальному випадку не можна побудувати обернений елемент.

Задання мультиплікативної структури на просторі $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ породжує кватерніони.

4. Означення простору кватерніонів. Кватерніном[3] q називається впорядкований набір чотирьох дійсних чисел (q_0, q_1, q_2, q_3) з поелементними операціями додавання і множення на дійсні числа:

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = (a_0, a_1, a_2, a_3) + (b_0, b_1, b_2, b_3) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$$
$$\alpha\mathsf{a} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \quad (\text{де } \alpha \in \mathbb{R} \text{ та } a_i,\ b_i \in \mathbb{R})$$

та своєрідною операцією множення, яку зручно означити через базисні елементи.

Враховуючи правило додавання, виділимо базисні елементи за аналогією з (3):

$$\mathsf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0(1,0,0,0) + q_1(0,1,0,0) + q_2(0,0,1,0) + q_3(0,0,0,1)$$
$$= q_0\mathsf{e}_0 + q_1\mathsf{e}_1 + q_2\mathsf{e}_2 + q_3\mathsf{e}_3\,,$$

де введено базисні елементи

$$\mathsf{e}_0 = (1,0,0,0)\,, \quad \mathsf{e}_1 = (0,1,0,0)\,, \quad \mathsf{e}_2 = (0,0,1,0)\,, \quad \mathsf{e}_3 = (0,0,0,1)\,.$$

Означимо добутки базисних елементів так:

$$\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_2 = -\mathsf{e}_2\cdot\mathsf{e}_1 = \mathsf{e}_3\,, \quad \mathsf{e}_2\cdot\mathsf{e}_3 = -\mathsf{e}_3\cdot\mathsf{e}_2 = \mathsf{e}_1\,, \quad \mathsf{e}_3\cdot\mathsf{e}_1 = -\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_3 = \mathsf{e}_2\,, \quad \mathsf{e}_0\cdot\mathsf{e}_i = \mathsf{e}_i\,, \tag{11}$$

або, використовуючи означення символу Леві-Чивіта:

$$\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_j = -\mathsf{e}_j\cdot\mathsf{e}_i = \varepsilon_{ijk}\dot{e}_k\,, \quad \mathsf{e}_0\cdot\mathsf{e}_i = \mathsf{e}_i\,, \tag{12}$$

де латинські індекси набувають значень від 1 до 3 (по індексах, що повторюються, передбачається сума). Для однакових елементів:

$$\mathsf{e}_0^2 = \mathsf{e}_0\,, \quad \mathsf{e}_1^2 = \mathsf{e}_2^2 = \mathsf{e}_3^2 = -\mathsf{e}_0\,. \tag{13}$$

Означення добутків можна записати у вигляді “таблиці Піфагора”:

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-\mathsf{e}_0$	e_3	$-\mathsf{e}_2$
e_2	e_2	$-\mathsf{e}_3$	$-\mathsf{e}_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-\mathsf{e}_1$	$-\mathsf{e}_0$

[3] Від лат. quaterni — по чотири.

(порядок множення — елемент стовпчика ліворуч риски на елемент рядка над рискою).

Для довільних двох кватерніонів матимемо (вважаючи, що дужки можна розкривати як звичайно):

$$\begin{aligned}\mathsf{a}\cdot\mathsf{b} =&\left(a_0\mathsf{e}_0+\sum_{i=1}^{3}a_i\mathsf{e}_i\right)\cdot\left(b_0\mathsf{e}_0+\sum_{j=1}^{3}b_j\mathsf{e}_j\right)\\ =&a_0b_0\mathsf{e}_0+\sum_{i=1}^{3}a_ib_0(\mathsf{e}_i\cdot\mathsf{e}_0)+\sum_{i=1}^{3}b_ia_0(\mathsf{e}_0\cdot\mathsf{e}_i)+\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j(\mathsf{e}_i\cdot\mathsf{e}_j)\\ =&\left(a_0b_0-\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)\mathsf{e}_0+\sum_{k=1}^{3}(a_0b_k+a_kb_0+\varepsilon_{ijk}a_ib_j)\mathsf{e}_k\,.\end{aligned}$$

У результаті, добутком двох кватерніонів a та b є кватерніон $\mathsf{q}=\mathsf{a}\cdot\mathsf{b}$ з компонентами

$$q_0=a_0b_0-a_ib_i\,,\quad q_k=a_0b_k+a_kb_0+\varepsilon_{ijk}a_ib_j\,,\quad k=\overline{1,3}\,. \tag{14}$$

Множина кватерніонів утворює простір з операціями додавання та множення, який позначається $\mathbb{H}$.

Так само, як і у випадку поля $\mathbb{C}$, базисний елемент e_0 еквівалентний дійсній одиниці і часто позначається просто 1. Інші елементи e_i відіграють роль уявних одиниць,

$$\mathsf{e}_1^2=\mathsf{e}_2^2=\mathsf{e}_3^2=-1\,,\quad \text{причому } \mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_2\cdot\mathsf{e}_3=-1.$$

Таким чином, кватерніони утворюються лінійними комбінаціями типу

$$\mathsf{a}=a_0+\sum_{i=1}^{3}a_i\mathsf{e}_i:=a_0+a_i\mathsf{e}_i \tag{15}$$

(надалі у таких виразах знак суми опускатиметься).

Отримана структура і є узагальненням множини $\mathbb{C}$, де замість однієї уявної одиниці виникає три. Як і у випадку комплексних чисел, кватерніон $\mathsf{q}=q_0\mathsf{e}_0$ ототожнюється з дійсним числом q_0. Кожний кватерніон можна розбити на суму дійсної q_0 та уявної $q_i\mathsf{e}_i$ величин, які у даному випадку називаються *скалярною* та *векторною* частинами кватерніона[4] (спеціальних загальноприйнятих позначень для них немає). Скалярна частина породжується першим множником декартового добутку $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, а векторна — другим. Множина суть скалярних кватерніонів замкнена відносно операцій множення та додавання і збігається з простором дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Довільний кватерніон q можна записати у вигляді суми скалярного та векторного кватерніонів:

$$\mathsf{q}=(q_0)+(q_i\mathsf{e}_i)=\mathsf{q}^{(s)}+\mathsf{q}^{(v)}\,,$$

тому у множині $\mathbb{H}$ можна виділити дві підмножини таких елементів:

$$\mathbb{H}_s=\{q\in\mathbb{H}\,:\,q_i=0\}\quad(\text{скалярні}),\quad \mathbb{H}_v=\{q\in\mathbb{H}\,:\,q_0=0\}\quad(\text{векторні})$$

[4] У теорії відносності скалярна частина називається *часовою*, а векторна — *просторовою*.

всі елементи $\mathbb{H}$ відбудовуються сумами елементів $\mathbb{H}_s$ та $\mathbb{H}_v$. У такому випадку кажуть, що простір $\mathbb{H}$ є *прямою сумою* підпросторів $\mathbb{H}_s$ та $\mathbb{H}_v$:

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_s \oplus \mathbb{H}_v \,.$$

Оскільки векторні кватерніони породжуються елементами $\mathbb{R}^3$, то трійку чисел (q_1, q_2, q_3) зручно позначати за допомогою одного вектора $\vec{q}$. З такою домовленістю запис

$$\mathtt{q} = (q_0, \vec{q}) \quad \text{означає} \quad \mathtt{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)\,,$$

і добуток $\mathtt{a}$ та $\mathtt{b}$ має вигляд:

$$\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b},\ a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})\,. \tag{16}$$

Таких позначень ми будемо дотримуватись і далі.

Для зручності введемо нумерацію компонент кватерніона та базисних елементів за допомогою грецьких індексів, які набувають значень від 0 до 3, тоді

$$\mathtt{a} = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu \mathtt{e}_\mu = a_\mu \mathtt{e}_\mu\,,$$

такі позначення зручні при використанні кватерніонів у теорії відносності.

Зауваження. Базисні елементи часто позначають $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, однак у нашому випадку зручніше дотримуватись інших позначень, щоб відрізняти базисний елемент $\mathbb{H}$ від уявної одиниці (це різні речі). ⌟

5. Особливості добутку кватерніонів. На відміну від комплексних чисел, добуток у просторі $\mathbb{H}$ не комутативний, тому такий простір називається *тілом* (тіло з комутативним добутком утворює поле), однак асоціативність зберігається:

$$\mathtt{q}_1 \cdot \mathtt{q}_2 \neq \mathtt{q}_2 \cdot \mathtt{q}_1\,, \quad \mathtt{q}_1 \cdot (\mathtt{q}_2 \cdot \mathtt{q}_3) = (\mathtt{q}_1 \cdot \mathtt{q}_2) \cdot \mathtt{q}_3\,,$$

а співвідношень дистрибутивності потрібно вказувати два, залежності від положення зовнішнього множника:

$$\mathtt{q}_1 \cdot (\mathtt{q}_2 + \mathtt{q}_3) = \mathtt{q}_1 \cdot \mathtt{q}_2 + \mathtt{q}_1 \cdot \mathtt{q}_3\,, \quad (\mathtt{q}_2 + \mathtt{q}_3) \cdot \mathtt{q}_1 = \mathtt{q}_2 \cdot \mathtt{q}_1 + \mathtt{q}_3 \cdot \mathtt{q}_1\,.$$

Ці властивості легко довести прямою підстановкою. Покажемо, наприклад, некомутативність:

$$\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + (a_0 b_k + a_k b_0 + \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \mathtt{e}_k\,,$$
$$\mathtt{b} \cdot \mathtt{a} = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + (a_0 b_k + a_k b_0 - \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \mathtt{e}_k\,,$$

відмінність буде у останнього доданку (знак змінюється за рахунок властивостей символу Леві-Чивіта). Тільки добуток суто скалярних кватерніонів комутативний:

$$\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} = \mathtt{b} \cdot \mathtt{a} \quad \text{для } \mathtt{a} = a_0 \mathtt{e}_0 \text{ та } \mathtt{b} = b_0 \mathtt{e}_0\,,$$

а для добутку векторних кватерніонів немає певної властивості (анти)комутативності:

$$\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathtt{e}_k\,, \quad \text{для } \mathtt{a} = a_i \mathtt{e}_i \text{ та } \mathtt{b} = b_i \mathtt{e}_i\,.$$

Добуток кватерніонів різних типів (скалярного на векторний) є векторним кватерніоном:

$$\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} = (a_0 b_i)\mathtt{e}_i\,, \quad \text{для } \mathtt{a} = a_0\mathtt{e}_0 \text{ та } \mathtt{b} = b_i\mathtt{e}_i$$

Таким чином,

$$\mathbb{H}_s \cdot \mathbb{H}_s \subset \mathbb{H}_s\,, \quad \mathbb{H}_v \cdot \mathbb{H}_v \subset \mathbb{H} = \mathbb{H}_s \oplus \mathbb{H}_v\,, \quad \mathbb{H}_s \cdot \mathbb{H}_v \subset \mathbb{H}_v\,.$$

Некомутативність добутку кватерніонів свідчить про те, що елементи $\mathbb{H}$ потрібно уявляти більше за аналогією з матрицями або тензорами (для добутку яких характерна некомутативність), а не зі звичайними числами. У дійсності алгебру $\mathbb{H}$ можна однозначно реалізувати у матричному вигляді (див. далі).

Задача 2. Довести властивості асоціативності та дистрибутивності.

Зауваження. З означення добутків елементів базису випливає, що

$$\mathtt{e}_i \cdot \mathtt{e}_j + \mathtt{e}_j \cdot \mathtt{e}_i = -2\delta_{ij}\mathtt{e}_0\,, \quad i,j = \overline{1,3}.$$

Множина базисних елементів з такою властивістю породжує *алгебру Кліффорда*[5], яка широко використовується у квантовій теорії поля. У загальному означенні алгебри Кліффорда у правій частині записується подвоєна метрика простору:

$$\mathtt{e}_\alpha \cdot \mathtt{e}_\beta + \mathtt{e}_\beta \cdot \mathtt{e}_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta}\mathtt{e}_0\,, \quad \alpha,\beta = \overline{0,3}\,,$$

у нашому випадку матриця η — діагональною з елементами $(1, -1, -1, -1)$ на головній діагоналі. Така метрика описує простір Мінковського.

Алгебра, для якої $\mathtt{e}_\alpha \cdot \mathtt{e}_\beta + \mathtt{e}_\beta \cdot \mathtt{e}_\alpha = 0$ називається *алгеброю Грассмана*[6], це природний "антипод" звичних нам з класичного аналізу числових алгебр.

Ці математичні структури виникли значно пізніше робіт Гамільтона (у 60 – 70-і роки XIX століття), і після створення квантової механіки стали відігравати визначну роль у фізиці елементарних частинок. Зокрема антикомутуючими грассмановими числами описуються елементарні частинки з напівцілим спіном (електрон та інші). Для антикомутуючих алгебр побудовано свій аналіз, який багато в чому повторює звичайний — там теж можна означити похідну, границю, інтеграл, але досить своєрідним способом (див., зокрема, роботи Ф. Березіна). ⌟

6. Спряження та модуль для кватерніонів. За аналогією з комплексними числами, означимо операцію спряження кватерніонів як зміну знаку просторової частини:

Означення 1. *Спряженням у просторі* $\mathbb{H}$ *називається перетворення:*

$$\begin{aligned} {}^\dagger : \mathbb{H} &\to \mathbb{H}\,, \\ \mathtt{q} &\to \mathtt{q}^\dagger = (q_0 + q_i\mathtt{e}_i)^\dagger = q_0 - q_i\mathtt{e}_i\,, \end{aligned}$$

[5] W. K. Klifford, 1878.
[6] H. Grassmann, 1862

Перехід до спряженого кватерніона — зміна знаку при всіх уявних одиницях[7]. Очевидно, спряження стосується тільки векторних кватерніонів:

$$\mathbb{H}_s^\dagger = \mathbb{H}_s\,, \quad \mathbb{H}_v^\dagger = -\mathbb{H}_v\,.$$

Таки поведінка елементів $\mathbb{H}_s$ та $\mathbb{H}_v$ дозволяє дати більш просте означення цих підпросторів, без вказання координат:

$$\mathbb{H}_s = \{\mathtt{q} \in \mathbb{H} \,:\, \mathtt{q}^\dagger = \mathtt{q}\}\,, \quad \mathbb{H}_v = \{\mathtt{q} \in \mathbb{H} \,:\, \mathtt{q}^\dagger = -\mathtt{q}\}\,.$$

Операція спряження у просторі $\mathbb{H}$ (як і в $\mathbb{C}$) лінійна,

$$(\mathtt{a}+\mathtt{b})^\dagger = \mathtt{a}^\dagger + \mathtt{b}^\dagger\,, \quad (\alpha\mathtt{a})^\dagger = \alpha\mathtt{a}^\dagger \quad (\text{при } \alpha \in \mathbb{R})\,,$$

однак через некомутативність добутку є одна відмінність:

Лема 1. *Має місце рівність:*

$$(\mathtt{a}\cdot\mathtt{b})^\dagger = \mathtt{b}^\dagger \cdot \mathtt{a}^\dagger\,. \tag{17}$$

□ Дійсно, $(\mathtt{a}\cdot\mathtt{b})^\dagger = (a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}) - \big[a_0b_i + a_ib_0 + (\vec{a}\times\vec{b})_i\big]\mathtt{e}_i$, а права частина (17) рівна

$$b^\dagger \cdot a^\dagger = (b_0 - b_i\mathtt{e}_i)\cdot(a_0 - a_i\mathtt{e}_i) = (a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}) - (a_0b_i + a_ib_0 + (\vec{a}\times\vec{b})_i)\mathtt{e}_i \equiv (\mathtt{a}\cdot\mathtt{b})^\dagger\,,$$

що і треба було довести. ■

Добуток кватерніона на спряжений є дійсним числом:

$$\mathtt{q}\cdot\mathtt{q}^\dagger = (q_0 + q_i\mathtt{e}_i)\cdot(q_0 - q_i\mathtt{e}_i) = q_0^2 + \vec{q}^{\,2}\,,$$

і може бути взятий як означення модуля (довжини):

Означення 2. *Модулем кватерніона називається дійсне число $|\mathtt{q}|$, означене як*

$$|\mathtt{q}|^2 = \mathtt{q}\cdot\mathtt{q}^\dagger = \mathtt{q}^\dagger\cdot\mathtt{q}\,. \tag{18}$$

Очевидно, $|\mathtt{a}\cdot\mathtt{b}|^2 = (\mathtt{a}\cdot\mathtt{b})\cdot(\mathtt{a}\cdot\mathtt{b})^\dagger = \mathtt{b}^\dagger\cdot\mathtt{a}^\dagger\cdot\mathtt{a}\cdot\mathtt{b}$, звідки

$$|\mathtt{a}\cdot\mathtt{b}| = |\mathtt{a}|\cdot|\mathtt{b}|\,. \tag{19}$$

Зауваження. Для суто векторного кватерніона $\mathtt{q} = q_i\mathtt{e}_i \in \mathbb{H}_v$,

$$\mathtt{q}\cdot\mathtt{q}^\dagger = \vec{q}^{\,2} > 0\,, \quad \text{однак} \quad \mathtt{q}\cdot\mathtt{q} = -\mathtt{q}\cdot\mathtt{q}^\dagger = -\vec{q}^{\,2} < 0\,.$$

це означає, що квадрат суто векторного кватерніона — дійсна, але від'ємна величиною, і навпаки, якщо $\mathtt{q}\cdot\mathtt{q} < 0$, то $\mathtt{q}$ — суто векторний кватерніон.

Таку особливість квадрату можна використовувати як критерій належності кватерніона $\mathtt{q}$ до однієї з множин $\mathbb{H}_s$ та $\mathbb{H}_v$:

$$\mathbb{H}_s = \{\mathtt{q}\in\mathbb{H} \,:\, \mathtt{q}^2 > 0\}\,, \quad \mathbb{H}_v = \{\mathtt{q}\in\mathbb{H} \,:\, \mathtt{q}^2 < 0\}\,.$$

⌟

[7] Де б вони не були.

Зауваження. Простір $\mathbb{H}$ можна перетворити у евклідовий, задавши скалярний добуток. Легко перевірити, що

$$(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = \frac{1}{2}\left(\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}^\dagger + \mathtt{b} \cdot \mathtt{a}^\dagger\right)$$

задовольняє всі аксіоми скалярного добутку. ⌟

Як і у випадку комплексних чисел, означимо обернений кватерніон як

$$\mathtt{q}^{-1} \cdot \mathtt{q} = 1\,.$$

Для пошуку вигляду $\mathtt{q}^{-1}$ домножимо обидві частини рівності праворуч на $\mathtt{q}^\dagger$, тоді:

$$\mathtt{q}^\dagger = (\mathtt{q}^{-1} \cdot \mathtt{q}) \cdot \mathtt{q}^\dagger = \mathtt{q}^{-1} \cdot \left(\mathtt{q} \cdot \mathtt{q}^\dagger\right) = \mathtt{q}^{-1}\,|\mathtt{q}|^2\,,$$

звідки

$$\mathtt{q}^{-1} = \frac{\mathtt{q}^\dagger}{|\mathtt{q}|^2} = \frac{q_0 - q_i \mathtt{e}_i}{q_0^2 + \vec{q}^{\,2}}\,, \tag{20}$$

що відповідає формулі (8) для комплексних чисел. Очевидно, такий самий результат можна отримати і з формули $\mathtt{q} \cdot \mathtt{q}^{-1} = 1$.

Задача 3. Довести, що $(\mathtt{a} \cdot \mathtt{b})^{-1} = \mathtt{b}^{-1} \cdot \mathtt{a}^{-1}$.

Означення частки кватерніонів неознозначне, оскільки вираз $\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{b}}$ можна розуміти як $\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}^{-1}$, так і $\mathtt{b}^{-1} \cdot \mathtt{a}$ (взагалі кажучи, це не одне і те саме). Введемо поняття лівої та правої частки:

Означення 3. *Лівою часткою кватерніонів* $\mathtt{a}$ *та* $\mathtt{b}^{-1}$ *називається кватерніон* $\mathtt{q}$ *такий, що* $\mathtt{b} \cdot \mathtt{q} = \mathtt{a}$*, тоді* $\mathtt{q} = \mathtt{b}^{-1} \cdot \mathtt{a}$ *(знаменник — ліворуч).*

Правою часткою кватерніонів $\mathtt{a}$ *та* $\mathtt{b}^{-1}$ *називається кватерніон* $\mathtt{q}$ *такий, що* $\mathtt{q} \cdot \mathtt{b} = \mathtt{a}$*, тоді* $\mathtt{q} = \mathtt{a} \cdot \mathtt{b}^{-1}$ *(знаменник — праворуч).*

Використовуючи означення оберненого кватерніона, отримаємо:

$$\mathtt{b}^{-1} \cdot \mathtt{a} = \frac{\mathtt{b}^\dagger \cdot \mathtt{a}}{|\mathtt{b}|^2}\,, \quad \mathtt{a} \cdot \mathtt{b}^{-1} = \frac{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}^\dagger}{|\mathtt{b}|^2}\,.$$

7. Матрична реалізація алгебри кватерніонів. Розглянемо реалізацію кватерніонів у вигляді двомірних комплексних матриць. Покажемо, що відображення

$$\begin{aligned} U : \mathbb{H} &\to M(2,\mathbb{C}) \\ \mathtt{q} &\to A(q) \end{aligned} \quad \text{де} \quad U(\mathtt{q}) = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & q_2 + iq_1 \\ -q_2 + iq_1 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

задає у просторі квадратних двовимірних комплексних матриць $M(2,\mathbb{C})$ алгебраїчну структуру, яка тотожна структурі $\mathbb{H}$.

Для цього потрібно знайти образ елементів базису при такому перетворенні і перевірити правила множення. Очевидно,

$$U(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad U(\mathtt{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad U(\mathtt{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad U(\mathtt{e}_3) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\,.$$

Образи базисних елементів виражаються через матриці

$$\sigma_x = -iU(\mathsf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = -iU(\mathsf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = -iU(\mathsf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

які були введені В. Паулі у 1925 році для опису спіну електрона у квантовій механіці і називаються *матрицями Паулі*.

Легко показати, що для представлення базису e_α у просторі матриць виконуються ті самі правила множення, що і для кватерніонів. На рівні матриць Паулі:

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}\,, \quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (\text{при } i \neq j)\,. \tag{22}$$

Оскільки елементи базису з точністю до множника збігаються з матрицями Паулі, то твердження правильне.

Рівність (22) часто записують за допомогою комутатора та антикомутатора матриць:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\,.$$

Задача 4. Довести властивості (22) матриць Паулі.

Задача 5. Довести рівності:

$$\mathsf{Sp}\,\sigma_i = 0\,, \quad \mathsf{Sp}\,(\sigma_i\sigma_j) = \delta_{ij}\,, \quad \mathsf{Sp}\,(\sigma_i\sigma_j\sigma_k) = 2i\varepsilon_{ijk}\,.$$

Задача 6. Довести рівність:

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_k = \delta_{ij}\sigma_k - \delta_{ik}\sigma_i + i\varepsilon_{ijk}\,,$$

зокрема $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$.

Таким чином, алгебра кватерніонів ознозначно відповідає звичайним операціям додавання та множення двовимірних комплексних матриць вигляду (21) і навпаки, довільній матриці (21) можна однозначно співставити кватерніон. Простори з такою відповідністю називають *ізоморфними* (тотожними за своєю внутрішньою структурою). Це означає, що всі обчислення з кватерніонами можна виконувати в термінах матриць і навпаки. Матриці, яким відповідають кватерніони, мають вигляд:

$$U = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{C}\,. \tag{23}$$

Матриці Паулі разом з одиничним елементом задають базис у просторі таких матриць.

Відповідність кватерніону та матриці зручно записувати за допомогою матриць Паулі. Обернені вирази для базисних елементів через матриці σ_i:

$$U(\mathsf{e}_1) = i\sigma_1\,, \quad U(\mathsf{e}_2) = i\sigma_2\,, \quad U(\mathsf{e}_3) = i\sigma_3\,,$$

тоді

$$U(\mathsf{q}) = q_0U(1) + q_1U(\mathsf{e}_1) + q_2U(\mathsf{e}_2) + q_3U(\mathsf{e}_3) = q_0 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,, \tag{24}$$

де $\vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z$ — вектор з матричними компонентами, для нього:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = 3\,, \quad \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}\,. \tag{25}$$

Задача 7. Довести "магічну" властивість матриць Паулі: $\vec{\sigma} = -\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2$.

Розглянемо зміст інших понять, які було означено для кватерніонів у просторі матриць. Перехід до спряженого виразу:

$$U(\mathsf{e}_i^\dagger) \equiv -U(\mathsf{e}_i) = i\sigma_i\,,$$

але така операція не зводиться до простого комплексного спряження, оскільки $\sigma_i^* \neq \sigma_i$. У просторі комплексних матриць існує близька за змістом операція *ермітового спряження*, що означена як перехід до транспонованої комплексно спряженої матриці:

$$A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T\,.$$

Матриці з властивістю $A^\dagger = A$ називаються *ермітовими*, або *самоспряженими*[8]. Легко показати, що матриці Паулі ермітові,

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i\,,$$

тому

$$U(\mathsf{e}_i^\dagger) = i\sigma_i = -(i\sigma_i)^\dagger = U(\mathsf{e}_i)^\dagger\,,$$

тобто спряження у просторі кватерніонів відповідає ермітовому спряженню у просторі матриць, з цієї причини обидві операції позначені одним символом. Таким чином,

$$U(\mathsf{q}^\dagger) = U(\mathsf{q})^\dagger\,, \quad \text{або} \quad (q_0 + i\vec{\sigma}\cdot\vec{q})^\dagger = q_0 - i\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,. \tag{26}$$

Модуль кватерніона безпосередньо виражається через визначник відповідної матриці:

$$|\mathsf{q}|^2 = q_0^2 + \vec{q}^{\,2} = \det U(\mathsf{q})\,. \tag{27}$$

Дійсно,

$$\det U(\mathsf{q}) = (q_0 + iq_3)(q_0 - iq_3) + (q_2 + iq_1)(q_2 - iq_1) = q_0^2 + q_3^2 + q_2^2 + q_1^2\,.$$

8. Тригонометрична форма запису та формула Ейлера. Побудуємо форму запису, аналогічну тригонометричній формі представлення комплексних чисел, для кватерніонів, модуль яких дорівнює одиниці:

$$q_0^2 + \vec{q}^{\,2} = 1\,.$$

Такі кватерніони утворюють підмножину в $\mathbb{H}$, яку позначимо $\mathbb{H}_1$. Остання формула означає, що кожний з доданків дорівнює квадрату тригонометричної функції, тобто існує кут φ, для якого

$$q_0 = \cos\varphi\,, \quad |\vec{q}| = \sin\varphi\,,$$

[8] У квантовій механіці ермітові матриці є найближчими аналогами класичних спостережуваних (дійсних) величин.

тоді $\mathtt{q} \in \mathbb{H}_1$ має вигляд:

$$\mathtt{q} = q_0 + q_i \mathtt{e}_i = q_0 + |\vec{q}\,| \, \frac{q_i}{|\vec{q}\,|} \, \mathtt{e}_i = \cos\varphi + \sin\varphi \, \frac{q_i}{|\vec{q}\,|} \, \mathtt{e}_i \,.$$

Нехай $\vec{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ — одиничний вектор у напрямку вектора $\vec{q}$, у цих позначеннях

$$\mathtt{q} = \cos\varphi + (n_i \, \mathtt{e}_i) \sin\varphi = \cos\varphi + \mathtt{n} \sin\varphi \,, \tag{28}$$

де $\mathtt{n}$ — просторовий кватерніон. Це і є аналог формули $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ для кватерніонів одиничної довжини; у матричному представленні матимемо:

$$U(\mathtt{q}) = \cos\varphi + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\varphi \,. \tag{29}$$

Одиничний кватерніон характеризується кутом та одиничним напрямком у тривимірному просторі.

У звичайній формулі Ейлера фігурує експонента, виражена через тригонометричних функцій. Щоб отримати її аналог для кватерніонів візьмемо за основу звичайну формулу Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \,,$$

яка зводить обчислення до комбінації з степенями і підставимо в якості аргументу векторний кватерніон $\alpha\mathtt{n}$ (α є дійсним числом). Оскільки кватерніон $\mathtt{n} = n_i \mathtt{e}_i$ є чисто векторним, то

$$\mathtt{n}^2 = \mathtt{n} \cdot \mathtt{n} = -\mathtt{n} \cdot \mathtt{n}^\dagger = -1 \,, \quad \mathtt{n}^3 = \mathtt{n}^2 \cdot \mathtt{n} = -\mathtt{n} \,, \quad \mathtt{n}^4 = \mathtt{n}^2 \cdot 4 = 1 \,, \ldots$$

тобто парні степені $\mathtt{n}$ є числами, а непарні — пропорційні до $\mathtt{n}$:

$$\mathtt{n}^{2k} = (-1)^k \,, \quad \mathtt{n}^{2k+1} = (-1)^k \mathtt{n} \,.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \exp(\alpha\mathtt{n}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\mathtt{n})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \, \mathtt{n}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \, \mathtt{n}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \, \mathtt{n}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} \, \mathtt{n}^{2k} + \mathtt{e}_k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\alpha + \mathtt{n} \sin\alpha \,. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо формулу Ейлера:

$$\exp(\alpha\mathtt{n}) = \cos\alpha + \mathtt{n} \sin\alpha \,. \tag{30}$$

Доведений вираз є узагальненням формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Більш явно це проявляється у представленні матриць Паулі.

Задача 8. Довести безпосередньо, що для матриць Паулі

$$\exp[\alpha \, (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})] = \operatorname{ch}\alpha + (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \operatorname{sh}\alpha \,, \quad \exp\big[i\alpha \, (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\big] = \cos\alpha + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin\alpha \,.$$

Зауваження. Оскільки $\mathtt{n}^2 = -1$, то одиничний векторний кватерніон можна інтерпретувати як тривимірне узагальнення уявної одиниці, але, на відміну від числа i, "уявна одиниця" $\mathtt{n}$ характеризується не тільки від'ємним квадратом, а і напрямком у тривимірному просторі. Сума $\mathtt{n} = n_i \mathtt{e}_i$ є розкладом по базису уявних одиниць простору $\mathbb{H}$.

Добуток двох різних векторних "уявних одиниць" $\mathtt{n}_a$ та $\mathtt{n}_b$ має вигляд:

$$\mathtt{n}_c = \mathtt{n}_a \cdot \mathtt{n}_b = -\bar{n}_a \cdot \vec{n}_b + (\vec{n}_a \times \vec{n}_b)_k \mathtt{e}_k \,,$$

кватерніон $\mathtt{n}_c$ також має одиничну довжину, але у загальному випадку не є "уявною одиницею" за винятком випадку $\vec{n}_a \perp \vec{n}_b$, коли вектори $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$ та $\vec{n}_c$ утворюють праву трійку. Така властивість свідчить про відносність вибору базису уявних елементів у просторі $\mathbb{H}$, які можна пов'язати з довільною трійкою взаємно ортогональних векторів у просторі $\mathbb{R}^3$. Крім того, для переходу до іншого базису можна використати довільну ортогональну заміну координат. ⌟

Кватерніон довільної довжини можна звести до елементу $\mathbb{H}_1$ винесенням множника $|\mathtt{q}|$ за дужки. Тоді:

$$\mathtt{q} = |\mathtt{q}|\big[\cos\varphi + \sin\varphi\,(n_i \mathtt{e}_i)\big] = |\mathtt{q}| e^{\mathtt{n}\varphi} \,, \qquad (31)$$

де

$$\cos\varphi = \frac{q_0}{|\mathtt{q}|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{|\vec{q}|}{|\mathtt{q}|}\,, \quad \vec{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\,, \quad \mathtt{n} = n_i \mathtt{e}_i \,.$$

На рівні матриць Паулі:

$$U(\mathtt{q}) = q_0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{q} = |\mathtt{q}|(\cos\varphi + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin\varphi) = |\mathtt{q}| e^{i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\varphi} \,.$$

Задача 9. Нехай одиничний вектор $\vec{n}$ задано сферичними кутами (θ, φ). Показати, що:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \,.$$

Задача 10. Побудувати (формально) розклад вектора $\vec{\sigma}$ по ортам сферичної системи координат.

9. Просторові кватерніони, вектори та тривимірні повороти. Просторові кватерніони $\mathtt{a} = a_i \mathtt{e}_i \in \mathbb{H}_v$ утворюють підмножину у просторі $\mathbb{H}$, яка будується з елементів простору $\mathbb{R}^3$. Можна стверджувати і обернене, таким елементам однозначно можна співставити тривимірні векторам $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Як було показано вище, модулі просторових кватерніонів дорівнюють модулям відповідних векторів.

Особливе місце при розгляді просторових кватерніонів займають інші елементи $\mathbb{H}$, які мають одиничну довжину:

$$\mathbb{H}_1 = \{\mathtt{q} \in \mathbb{H} \,:\, |\mathtt{q}| = 1\} \,.$$

Виявляється, що як і у випадку комплексних чисел, одиничні кватерніони задають деякі перетворення у просторі, що породжує $\mathbb{H}$. Має місце наступне важливе твердження:

Лема 2. *Перетворення підпростору $\mathbb{H}_v$, яке задається одиничним кватерніоном $\mathtt{q} \in \mathbb{H}_1$ і має вигляд*

$$\begin{aligned} \alpha_q \ : H_v \ &\to H_v \\ \mathtt{a} \to \alpha_q(\mathtt{a}) &= \mathtt{q} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{q}^{-1} \end{aligned}$$

зберігає довжину кватерніона $\mathtt{a}$, *тобто* $|\alpha_q(\mathtt{a})| = |\mathtt{a}|$.

□ Покажемо спочатку, що кватерніон $\alpha_q(\mathtt{a})$ належить підмножині $\mathbb{H}_v$. Дійсно, оскільки $\mathtt{a}^\dagger = -\mathtt{a}$, то

$$(\alpha_q \mathtt{a})^\dagger = (\mathtt{q} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{q}^{-1})^\dagger = (\mathtt{q}^{-1})^\dagger \cdot \mathtt{a}^\dagger \cdot \mathtt{q}^\dagger = \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}^\dagger \cdot \mathtt{q}^{-1} = -\mathtt{q} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{q}^{-1} = -\alpha_q(\mathtt{a})\,,$$

оскільки для елементів $\mathbb{H}_1$, згідно з (20), обернений елемент рівний спряженому, тобто $\mathtt{q}^{-1} = \mathtt{q}^\dagger$.

Враховуючи властивість $|\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}| = |\mathtt{b} \cdot \mathtt{a}| = |\mathtt{a}| \cdot |\mathtt{b}|$, отримаємо:

$$|\alpha_q \mathtt{a}| = |\mathtt{q} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{q}^{-1}| = |\mathtt{q}^{-1} \cdot \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}| = |\mathtt{a}|\,,$$

що і треба було довести. ■

У тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ перетворення, які зберігають довжину векторів, є або поворотами навколо осі, або відбиваннями у площині. У дійсності для перетворень, про які йдеться у доведеному твердженні, реалізується друга властивість.

Для доведення цього факту знайдемо добуток $\mathtt{a}' = \mathtt{q} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{q}^{-1}$ у явній формі. Нехай

$$\mathtt{q} = \cos\varphi + \mathtt{n} \sin\varphi\,, \quad \mathtt{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\,, \quad \text{та} \quad \mathtt{a} = a_i \mathtt{e}_i\,.$$

Для спрощення обчислень розкладемо вектор $\vec{a}$ на поздовжню та поперечну компоненти по відношенню до напрямку $\vec{n}$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp\,, \quad \vec{a}_\parallel = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n})\,, \quad \vec{a}_\perp = \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})\,.$$

Тоді

$$\mathtt{a}' = \mathtt{q} \cdot (\mathtt{a}_\parallel + \mathtt{a}_\perp) \cdot \mathtt{q}^{-1} = \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\parallel \cdot \mathtt{q}^{-1} + \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\perp \cdot \mathtt{q}^{-1}\,.$$

Розглянемо спочатку перший доданок з поздовжньою компонентою. За означенням:

$$\begin{aligned} \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\parallel =& (\cos\varphi + \mathtt{n} \sin\varphi) \cdot \mathtt{a}_\parallel = -\sin\varphi(\vec{n} \cdot \vec{a}_\parallel) + \left[\cos\varphi\, a_i^\parallel + \sin\varphi(\vec{n} \times \vec{a}_\parallel)\right]_i \mathtt{e}_i \\ \equiv& -\sin\varphi(\vec{n} \cdot \vec{a}_\parallel) + \cos\varphi\, \mathtt{a}_\parallel = -\sin\varphi\,(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \cos\varphi\, \mathtt{a}_\parallel\,. \end{aligned}$$

Враховуючи останній множник $\mathtt{q}^{-1} = \cos\varphi - \mathtt{n} \sin\varphi$:

$$\begin{aligned} \mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\parallel \cdot \mathtt{q}^{-1} =& (\mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\parallel) \cdot \mathtt{q}^{-1} = \left[-\sin\varphi\,(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \cos\varphi\, \mathtt{a}\right] \cdot \left[\cos\varphi - \mathtt{n} \sin\varphi\right] \\ =& \left[\sin^2\varphi\, n_i(\vec{a} \cdot \vec{n}) + a_i^\parallel \cos^2\varphi - \sin\varphi \cos\varphi (\vec{a}_\parallel \times \vec{n})_i\right] \mathtt{e}_i \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{a}_\parallel = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n})$ та $\vec{a}_\parallel \times \vec{n} = 0$, то

$$\mathtt{q} \cdot \mathtt{a}_\parallel \cdot \mathtt{q}^{-1} = \mathtt{a}_\parallel\,,$$

тобто доданок з поздовжньою компонентою не змінюється в результаті перетворення.

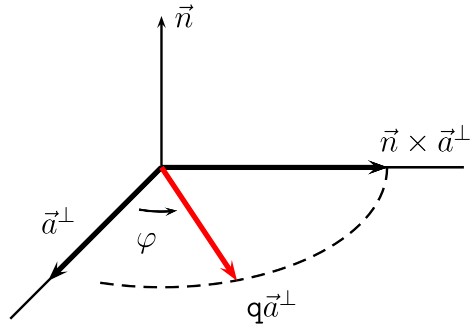

Рис. 1. *Геометричний зміст перетворення* $\mathtt{a}_\perp \to \mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp$.

Розглянемо так само перетворення поперечної компоненти векторного кватерніону. Матимемо:

$$\begin{aligned}\mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp =&(\cos\varphi+\mathtt{n}\sin\varphi)\cdot\mathtt{a}_\perp = -\sin\varphi(\vec{n}\cdot\vec{a}_\perp)+\big[\cos\varphi\,\vec{a}+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\big]_i\mathtt{e}_i\\ =&\big[\cos\varphi\, a_i^\perp+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\big]_i\mathtt{e}_i=\cos\varphi\,\mathtt{a}_\perp+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)_i\mathtt{e}_i\,.\end{aligned}$$

У результаті обчислення добутку отримаємо чисто просторовий кватерніон, який відповідає вектору

$$\vec{x}=\cos\varphi\,\vec{a}_\perp+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\,.$$

Геометрично ця рівність означає розклад вектора $\vec{x}$ по ортогональному базису $\vec{a}^\perp$ та $(\vec{n}\times\vec{a}^\perp)$ у площині, перпендикулярній вектору $\vec{n}$ (рис. 1). Очевидно, довжина вектора $\vec{x}$ дорівнює $|\vec{a}^\perp|$, і кінці всіх трьох векторів $\vec{x}$, $\vec{a}^\perp$ та $(\vec{n}\times\vec{a}^\perp)$ належать колу. Оскільки кут між векторами $\vec{x}$ та $\vec{a}^\perp$ дорівнює φ, то перетворення $\mathtt{a}_\perp\to\mathtt{x}=\mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp$ еквівалентне повороту вектора $\vec{a}^\perp$ на кут φ навколо напрямку $\vec{n}$.

Аналогічно обчислюється добуток $\mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp$ з останнім множником $\mathtt{q}^{-1}$. Отримаємо, тимчасово позначивши знайдений добуток через $\mathtt{x}$ (векторний кватерніон):

$$(\mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp)\cdot\mathtt{q}^{-1}=\mathtt{x}\cdot(\cos\varphi-\mathtt{n}\sin\varphi)=(\vec{x}\cdot\vec{n})+\big[x_i\cos\varphi-\sin\varphi\,(\vec{x}\times\vec{n})_i\big]\mathtt{e}_i\,.$$

Оскільки $\vec{x}\perp\vec{n}$, то перший доданок зникає і результат множення буде векторним кватерніоном, який відповідає вектору

$$\vec{y}=\vec{x}\cos\varphi-(\vec{x}\times\vec{n})\sin\varphi\equiv\vec{x}\cos\varphi+(\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi\,.$$

Як і вище, вектор $\vec{y}$ отримаємо з вектора $\vec{x}$ поворотом на кут φ навколо осі $\vec{n}$ у тому є напрямку, у якому відбувався поворот вектора $\vec{a}_\perp$ для отримання вектора $\vec{x}$. Підстановка виразу для вектора $\vec{x}$ дає:

$$\begin{aligned}\vec{y}=&\cos\varphi\big[\cos\varphi\,\vec{a}_\perp+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\big]+\sin\varphi\big(\vec{n}\times\big[\cos\varphi\,\vec{a}_\perp+\sin\varphi(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\big]\big)\\ =&\cos^2\varphi\,\vec{a}_\perp+2\sin\varphi\cos\varphi\,(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)+\sin^2\varphi\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\,,\end{aligned}$$

враховуючи, що $\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)=\vec{n}(\vec{a}_\perp\cdot\vec{n})-\vec{a}_\perp\equiv-\vec{a}_\perp$, отримаємо остаточно:

$$\mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp\cdot\mathtt{q}=\mathtt{a}'_\perp\,,\quad \vec{a}'_\perp\to\cos2\varphi\,\vec{a}_\perp+\sin2\varphi\,(\vec{n}\times\vec{a}_\perp)\,,\tag{32}$$

тобто вектор $\vec{a}'_\perp$, який описує повне перетворення є поворотом вектора $\vec{a}_\perp$ на кут 2φ навколо напрямку $\vec{n}$ (рис. 2).

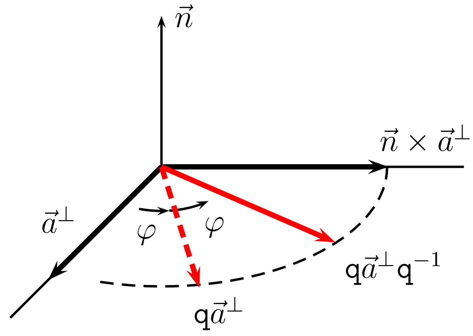

Рис. 2. *Геометричний зміст перетворення* $\mathtt{a}_\perp \to \mathtt{q}\cdot\mathtt{a}_\perp\cdot\mathtt{q}^{-1}$.

Остаточно, перетворення $\mathtt{a} \to \mathtt{a}' = \mathtt{q}\cdot\mathtt{a}\cdot\mathtt{q}^{-1}$ для відповідного вектора $\vec{a}$ має вигляд:

$$\vec{a} \to \vec{a}\,' = \vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}) + \cos 2\varphi\,\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n}) + \sin 2\varphi\,(\vec{n}\times\vec{a})\,.$$

Висновок:

Дія одиничного кватерніона

$$\mathtt{q} = \cos\varphi + \mathtt{n}\sin\varphi = e^{\mathtt{n}\varphi} \in \mathbb{H}_1$$

на векторний кватерніон $\mathtt{a} \in \mathbb{H}_v$ *за правилом*

$$\mathtt{a} \to \mathtt{a}' = \mathtt{q}\cdot\mathtt{a}\cdot\mathtt{q}^{-1} = e^{\mathtt{n}\varphi}\cdot\mathtt{a}\cdot e^{-\mathtt{n}\varphi}$$

однозначно відповідає повороту вектора $\vec{a}$ *навколо напрямку* $\vec{n}$ *на кут* 2φ.

Таким чином, серед кватерніонів $\mathbb{H}$ разом з елементами $\mathbb{H}_v$, які відповідають тривимірним векторам, є також і елементи $\mathbb{H}_1$, що відповідають ортогональним перетворенням векторів. Перетворення зводяться до звичайних добутків кватерніонів (аналогічна ситуація була з комплексними числами та двовимірними векторами).

Задача 11. Отримати той самий результат у матричній формі за допомогою матриць Паулі.

10. Група поворотів у просторі $\mathbb{R}^3$. Повороти у просторі $\mathbb{R}^3$ описуються за допомогою ортогональних матриць переходу $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ і діють на вектори за звичайним правилом:

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathbf{A}\vec{r}.$$

Два послідовно виконані перетворення повороту також можна подати у вигляді перетворення повороту відносно деякої осі. Дійсно, сумарне перетворення

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathbf{A}_1\vec{r} \to \vec{r}\,'' = \mathbf{A}_2\vec{r}\,' = \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\vec{r}) = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)\vec{r}$$

описується матрицею $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, яка теж є ортогональною,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^T\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 1\,,$$

і може розглядатись як матриця деякого іншого повороту. Тому тривимірні ортогональні повороти утворюють групу, яка називається *спеціальною ортогональною* *групою* і позначається $\mathsf{SO}(3)$. Матриці поворотів утворюють матричне представлення цієї групи:

$$\mathsf{SO}(3) = \{\mathbf{A} \,:\, \mathbf{A}^T\mathbf{A} = 1\}\,.$$

Для заданих поворотів $\mathbf{A}_{1,2}$ можна визначити напрямок та величину результуючого повороту, аналізуючи структуру матриці $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$. Технічно інколи це зробити досить важно, оскільки потрібна інформацію закладено до матриці повороту в неявній формі.

Розглянемо, як проявляються групові властивості поворотів у кватерніонному представленні, де поворот *явно* задається через напрямок $\vec{n}$ та величину кута повороту φ у вигляді одиничного кватерніона. Виконаємо послідовно два перетворення повороту, що задаються кватерніонами $\mathsf{q}_{1,2} \in \mathbb{H}_1$:

$$\mathsf{a} \to \mathsf{a}' = \mathsf{q}_1 \cdot \mathsf{a} \cdot \mathsf{q}_1^{-1} \to \mathsf{a}'' = \mathsf{q}_2 \cdot \mathsf{a}' \cdot \mathsf{q}_2^{-1} = \mathsf{q}_2 \cdot (\mathsf{q}_1 \cdot \mathsf{a} \cdot \mathsf{q}_1^{-1}) \cdot \mathsf{q}_2^{-1}\,.$$

Перегруповуючи множники без зміни порядку, отримаємо:

$$\mathsf{a} \to \mathsf{a}'' = (\mathsf{q}_2 \cdot \mathsf{q}_1) \cdot \mathsf{a} \cdot (\mathsf{q}_1^{-1} \cdot \mathsf{q}_2^{-1})\,.$$

Але $\mathsf{q}_1^{-1} \cdot \mathsf{q}_2^{-1} = (\mathsf{q}_2 \cdot \mathsf{q}_1)^{-1}$, послідовність двох перетворень $\mathsf{q}_{1,2}$ можна записати у вигляді одного перетворення з кватерніоном $\mathsf{q} = \mathsf{q}_2 \cdot \mathsf{q}_1$:

$$\mathsf{a} \to \mathsf{a}'' = \mathsf{q} \cdot \mathsf{a} \cdot \mathsf{q}^{-1}\,, \quad \mathsf{q} = \mathsf{q}_2 \cdot \mathsf{q}_1\,.$$

Кватерніон q, очевидно, також буде одиничним. В результаті,

Перетворення у просторі $\mathbb{H}_v$, які задаються елементами $\mathsf{q} \in \mathbb{H}_1$, утворюють групу, яка відповідає групі тривимірних ортогональних поворотів $\mathsf{SO}(3)$ у просторі $\mathbb{R}^3$.

Для прикладу побудуємо сумарний поворот (визначимо напрямок та величину) для двох послідовних поворотів навколо осей $\vec{a}$ та $\vec{b}$ з кутами φ_a та φ_b відповідно. Загальний поворот відповідає добутку

$$\mathsf{q} = \left(\cos\frac{\varphi_b}{2} + \mathsf{b}\sin\frac{\varphi_b}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\varphi_a}{2} + \mathsf{a}\sin\frac{\varphi_a}{2}\right) = e^{\mathsf{b}\varphi_b/2}e^{\mathsf{a}\varphi_a/2}$$

(спочатку поворот $\vec{a}$, потім $\vec{b}$) і описує деякий поворот навколо осі $\vec{c}$ на кут φ_c, тобто

$$e^{\mathsf{c}\varphi_c/2} = e^{\mathsf{b}\varphi_b/2}e^{\mathsf{a}\varphi_a/2}\,.$$

Для визначення $\vec{c}$ та φ_c знайдемо добуток у правій частині:

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{c}\varphi_c/2} = \left(\cos\frac{\varphi_b}{2} + \mathsf{b}\sin\frac{\varphi_b}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\varphi_a}{2} + \mathsf{a}\sin\frac{\varphi_a}{2}\right) = \cos\frac{\varphi_a}{2}\cos\frac{\varphi_b}{2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\sin\frac{\varphi_a}{2}\sin\frac{\varphi_b}{2} \\ + \left[\vec{a}\sin\frac{\varphi_a}{2}\cos\frac{\varphi_b}{2} + \vec{b}\sin\frac{\varphi_b}{2}\cos\frac{\varphi_a}{2} - (\vec{a}\times\vec{b})\sin\frac{\varphi_a}{2}\sin\frac{\varphi_b}{2}\right]_i \mathsf{e}_i\,. \end{aligned}$$

Звідси, порівнюючи праву та ліву частини, отримаємо систему рівнянь на величини $\vec{c}$ та φ_c:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\varphi_c}{2} = \cos\dfrac{\varphi_a}{2}\cos\dfrac{\varphi_b}{2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\sin\dfrac{\varphi_a}{2}\sin\dfrac{\varphi_b}{2}\,, \\ \vec{c}\sin\dfrac{\varphi_c}{2} = \vec{a}\sin\dfrac{\varphi_a}{2}\cos\dfrac{\varphi_b}{2} + \vec{b}\sin\dfrac{\varphi_b}{2}\cos\dfrac{\varphi_a}{2} - (\vec{a}\times\vec{b})\sin\dfrac{\varphi_a}{2}\sin\dfrac{\varphi_b}{2} \end{cases}$$

як легко розв'язати послідовно (виразивши спочатку кут φ_c з першого рівняння).

Про повну тотожність груп тривимірних поворотів та групи, яка утворюється кватерніонами, строго кажучи, говорити не можна. Дійсно, у просторі $\mathbb{R}^3$ тотожним перетворенням буде довільний поворот з кутом, кратним 2π. У кватерніонній формі запису кути поворотів подвоєні, тому перетворення $\mathbb{H}_v$ з кутами, кратними π відповідають тотожнім перетворенням у просторі $\mathbb{R}^3$. Для ілюстрації запишемо перетворення повороту навколо осі z на кут φ обома способами. Матриця повороту буде мати вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідний кватерніон запишеться як

$$\mathtt{q} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathtt{e}_3\sin\frac{\varphi}{2}\,,$$

або у матричному представленні

$$U(\mathtt{q}) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, повороту на кут $\varphi = 2\pi$ відповідає одинична ортогональна матриця $\mathbf{A} = 1$, але для кватерніонної версії $U = -1$. Для кута $\varphi = 4\pi$ обидві матриці будуть одиничними. Це означає, що одній ортогональній матриці $\mathbf{A}$ можна співставити два кватерніона у матричному представленні: U та $(-U)$. На результати це ніяк не впливає, оскільки у законі перетворення є два множники U і знак компенсується.

Зауваження. Одна з причин полягає в тому, що така група перетворень описує зміну не тільки векторів, які у фізиці описують частинки з цілим спіном, а і деяких специфічних об'єктів. які називаються *спінорами* і використовуються для опису частинок з напівцілим спіном (електронів та інших)[9]. Повний поворот для спінорів — це кватерніонний поворот на кут 2π, або просторовий на 4π.

У дійсності елементи $\mathtt{q} \in \mathbb{H}_1$ утворюють групу лінійних перетворень двовимірного комплексного простору $\mathbb{C}^2$ (його елементи називаються *спінорами*). Група представляється матрицями типу

$$U(q) = \cos\varphi + U(\mathtt{n})\sin\varphi\,, \quad \det U(\mathtt{q}) = |\mathtt{q}|^2 = 1\,,$$

тобто це матриці з одиничними визначниками. У іншій формі:

$$U = U(q) = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{C}\,, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1\,.$$

[9] Звідси і двійка.

Дія на елементи $\mathbb{C}^2$ задається звичайним добутком

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uz_1 + vz_2 \\ -v^* z_1 + u^* z_2 \end{pmatrix} .$$

Як і у дійсному випадку, норма елемента $\mathbb{C}^2$ при такому перетворенні зберігається:

$$|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = z'^*_1 z'_1 + z'^*_2 z'_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

(як раз за рахунок того, що визначник матриці перетворення дорівнює одиниці).

Такі перетворення у комплексному просторі $\mathbb{C}^2$, що за змістом близькі до ортогональних перетворень у $\mathbb{R}^3$, називаються *унітарними перетвореннями*, а відповідні матриці — *унітарними*. Умову ортогональності замінює умова унітарності (її легко перевірити для матриць, що зараз розглядаються):

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1 , \quad \text{або} \quad U^{-1} = U^\dagger .$$

Унітарні перетворення утворюють групу, яка називається *спеціальною унітарною групою* і позначається

$$\mathsf{SU}(2) = \{U \ : \ U^\dagger U = 1\}$$

Група $\mathsf{SU}(2)$ включає, грубо кажучи, "вдвічі більше" перетворень, ніж $\mathsf{SO}(3)$.

Що стосується тривимірних векторів, то їм, як було показано вище, співставляються двовимірні матриці із специфічною структурою (еквіваленти векторних кватерніонів). У послідовному розгляді виявляється, що у просторі $\mathbb{C}^2$ вони є тензорами другого рангу (тому у законі їх перетворення фігурують два множники з матрицями переходу). Спін об'єкту однозначно відповідає рангу тензора, який його описує у просторі $\mathbb{C}^2$. Тензори непарного рангу відповідають полям з напівцілим спіном, а парного — з цілим (подвоєний спін збігається з рангом тензора, числом незалежних індексів у $\mathbb{C}^2$).

Література: [7]. ⌟

Література

[1] Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. *Класична механіка.* К.: ВПЦ "Київський Університет". 2008 — 480 с.

[2] Казанова Г., *Векторная алгебра*, "Мир", 1979.

[3] Арнольд В. И., *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*, МЦНМО, 2002.

[4] Курош А.Г., *Курс высшей алгебры*, М.: "Наука", 1975; Фадеев Д.К., *Лекции по алгебре*, М.: Наука, 1984.

[5] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А., *Кватернионы в релятивистской физике*, М.: УРСС, 2003.

[6] Мальцев А.И., *Алгебраические системы*, М.: "Наука", 1970.

[7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия: методы и приложения*, М.: "Наука", 1986.

Навчальне видання

Романенко Олександр Вікторович

Додаткові розділи класичної механіки: Кватерніони

Методична розробка для студентів фізичного факультету

Оригінал-макет виготовлено автором
за допомогою видавничого пакета LaTeX2e

ПП «Elena and Co»
08001, м. Обухів Київської обл., вул. Шкільна, 16

Підписано до друку 12.10.2019	Формат 60x84 1/16
Папір друк. №1. Друк офсетний.	Умовн. друк. арк. 1.0
Наклад 100	Зам. №9-1288