

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ледней М.Ф., Романенко О.В.

## ЗАДАЧІ З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

*Навчально-методичний посібник  
для студентів фізичного факультету*

Видавничо-поліграфічний центр  
“Київський університет”

# Зміст

<b>Передмова</b> .....	3
<b>Рекомендований план практичних занять</b> .....	4
<b>1. Механіка Ньютона</b> .....	5
1.1. Одновимірні коливання .....	5
1.2. Одновимірний рух. Період .....	7
1.3. Рух зарядженої частинки в електромагнітному полі .....	9
1.4. Рух у центральному полі .....	11
1.5. Зіткнення та розсіювання частинок .....	14
<b>2. Механіка Лагранжа</b> .....	16
2.1. Рівняння Лагранжа I роду .....	16
2.2. Рівняння Лагранжа другого роду .....	17
2.3. Побудова функції Лагранжа для системи частинок .....	19
2.4. Абсолютно тверде тіло .....	27
2.5. Малі коливання .....	35
<b>3. Механіка Гамільтона</b> .....	42
3.1. Перетворення Лежандра, рівняння Гамільтона .....	42
3.2. Дужки Пуассона .....	45
3.3. Канонічні перетворення .....	47
3.4. Рівняння Гамільтона-Якобі .....	49
<b>4. Механіка суцільного середовища</b> .....	52
4.1. Теорія пружності .....	52
4.2. Гідродинаміка .....	53
<b>Література</b> .....	55

# Передмова

Курс класичної механіки є першим фундаментальним курсом теоретичної фізики, який читається на протязі двох семестрів для студентів фізичних спеціальностей Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Даний посібник орієнтований на студентів фізичного факультету і укладений згідно програми курсу “Класична механіка”. Він є узагальненням багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни кафедрою теоретичної фізики на фізичному факультеті. Набір задач розрахований на “середньостатистичного” студента і відповідає, на наш погляд, тому мінімуму знань, вмінь та навичок, який повинен мати кожен студент після річного курсу класичної механіки.

У збірнику приведені тільки умови задач, для деяких — короткі вказівки. Автори навмисне вирішили не давати відповідей та розв’язків. Для більшості задач, можна провести додаткове дослідження — окрім відповіді на пряме завдання, що вказане у самій умові задачі (для ілюстрації у деяких задачах на початку збірника умова подана розширено). Більше того, розвитку самостійності та незалежності мислення читача також сприятиме вміння перевірити свою відповідь (по розмірності, аналізом граничних випадків). Задачі, відмічені символом “o” складають програму-мінімум, яку повинен засвоїти студент для розуміння курсу.

Автори

Київ 2012

## Рекомендований план практичних занять

У програмі навчальній фізичного факультету для вивчення класичної механіки передбачено 68 годин практичних занять (на два семестри).

# Розділ 1

## Механіка Ньютона

### 1.1. Одновимірні коливання

Позначення:  $x$  — декартова координата,  $F(x, \dot{x}, t)$  — сила. Рівняння Ньютона має вигляд:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad \text{або:} \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

(тут  $F(\dots) = mf(\dots)$ ). Для випадку осцилятора  $F = -kx + F_d + F_{ext}$ , де  $k$  — коефіцієнт пружності,  $F_d$  — сила тертя,  $F_{ext}$  — зовнішня сила. У задачах, де вказано “дослідити рух” слід подати відповідь для довільних початкових умов  $x(0)$  та  $\dot{x}(0)$  та проаналізувати її залежність від початкових даних та параметрів задачі (граничні випадки тощо).

**Задача 1°.** Дослідити рух вільного одновимірного гармонічного осцилятора з масою  $m$  і коефіцієнтом жорсткості  $k$ .

**Задача 2°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора з масою  $m$  і коефіцієнтом жорсткості  $k$  за наявності сили тертя, пропорційної швидкості  $F_d = -\alpha\dot{x}$ . Вважаючи початкові умови довільними, розглянути такі випадки:

$$1) \beta > \omega_0; \quad 2) \beta = \omega_0; \quad 3) \beta < \omega_0,$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — власна частота осцилятора,  $\beta = \frac{\alpha}{2m}$  — коефіцієнт загасання<sup>1</sup>. Показати, що розв’язок  $x(t)$  для  $\beta > \omega_0$  неперервно переходить у розв’язок для  $\beta < \omega_0$  через  $\beta = \omega_0$ . Розглянути випадок великого тертя  $\beta \gg \omega_0$ . Для періодичного руху визначити дисипацію енергії  $dE/dt$ .

**Задача 3.** Для випадку аперіодичного руху (задача ??) встановити, для якої величини параметру загасання  $\beta$  характерний час загасання коливань мінімальний.

**Задача 4.** Для випадку аперіодичного руху (задача ??) встановити, для яких параметрів та початкових умов осцилятор проходить через положення рівноваги тільки один раз.

**Задача 5°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора без тертя, під дією періодичної змушуючої сили  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . Дослідити закон руху для випадку резонансу  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

**Задача 6.** Побудувати в квадратурах розв’язок задачі про вимушені коливання одновимірного осцилятора без тертя під дією довільної змушуючої сили  $F(t)$ .

*Вказівка:* один із способів розв’язування задачі полягає у введенні комплексної змінної  $\xi := \dot{x} + i\omega_0 x$ .

► У задачах ??–?? дослідити коливання одновимірного осцилятора без тертя під дією змушуючої сили, заданої неперервною функцією  $F(t)$ . Початкові умови  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Розв’язок

---

<sup>1</sup> Дані позначення використовуються в межах усього параграфу

отримати як прямим інтегруванням рівняння руху, так і використовуючи результат задачі ??.

**Задача 7°.**  $F(t) = F_0 = \text{const}$ .

**Задача 8°.**  $F(t) = \alpha t$ , де  $\alpha = \text{const}$ .

**Задача 9°.**  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ , де  $F_0, \alpha = \text{const}$  ( $\alpha > 0$ ).

**Задача 10°.**  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$ , де  $F_0, \alpha, \omega = \text{const}$  ( $\alpha > 0$ ). Проаналізувати характер коливань залежно від величини  $\alpha$ .

► У задачах ??-?? знайти кінцеву амплітуду коливань одновимірного осцилятора без тертя під дією змушуючої сили, заданої кусково-неперервною функцією  $F(t)$ . Початкові умови  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

**Задача 11.** 
$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{T}, & \text{при } 0 < t < T, \\ F_0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

**Задача 12.** 
$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{T} & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t > T; \end{cases}$$

**Задача 13.** 
$$F(t) = \begin{cases} F_0, & \text{при } 0 < t < T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

**Задача 14.** 
$$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, & \text{при } 0 < t < T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$$

*Вказівка:* залежність  $x(t)$  — неперервна функція, тому задачу треба розв'язувати на проміжках, де  $F(t)$  — гладка, а потім "зшити" розв'язки неперервним способом. Якщо  $T$  — точка розриву  $F(t)$  або  $\dot{F}(t)$ , то умови "зшивки" мають вигляд:  $x(T+0) = x(T-0)$ ,  $\dot{x}(T+0) = \dot{x}(T-0)$ .

**Задача 15.** Дослідити коливання осцилятора під дією періодичної сили

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_0, & nT < t < nT + \Delta T \\ 0, & nT + \Delta T < t < (n+1)T \end{cases}$$

**Задача 16°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора за наявності тертя, пропорційного швидкості  $F_d = -\alpha \dot{x}$ , під дією періодичної змушуючої сили  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . Розглянути випадок резонансу  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

**Задача 17°.** Дослідити (задача ??) залежність амплітуди  $A$  та запізнення за фазою  $\varphi$  коливань від частоти  $\omega$  змушуючої сили при різних величинах коефіцієнта тертя. Побудувати графіки  $A(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  для різних значень  $\beta$ . За яких умов крива  $A(\omega)$  не має максимуму? Чому значення  $A(0)$  не залежить від декременту загасання?

**Задача 18°.** Знайти (задача ??) середню за період енергію  $W$ , що поглинається осцилятором. Дослідити залежність  $W(\omega)$  та побудувати її графік при різних значеннях  $\beta$ . Розглянути граничні випадки малої та великої віддаленості від резонансу  $|\omega - \omega_0| \ll \beta$  та  $|\omega - \omega_0| \gg \beta$ .

**Задача 19\*.** Побудувати в квадратурах розв'язок задачі про вимушені коливання осцилятора з тертям, пропорційним швидкості, під дією довільної змушуючої сили  $F(t)$ :

- 1) використовуючи перетворення Фур'є;
- 2) за допомогою прямого означення функції Гріна.

## 1.2. Одновимірний рух. Період

Під час одновимірного руху частинки маси  $m$  у потенціалі  $U(x)$  залежність  $x(t)$  її координати від часу знаходиться з рівняння

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

де величини сталої  $t_0$  та енергії  $E$  визначаються початковими значеннями координати та швидкості частинки.

Період фінітного руху частинки дорівнює

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

де  $x_1$  і  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) — точки повороту, що являються розв'язками рівняння  $E = U(x)$ .

Для дослідження руху можна дотримуватись такої послідовності дій:

- 1) побудувати графік  $U(x)$ , визначити області, можливі для руху для кожного можливого значення енергії, знайти точки повороту;
- 2) знайти траєкторію  $x(t)$  для якісно різних випадків руху;
- 3) для випадку фінітного руху знайти період;
- 4) знайти частоту коливань для фінітного руху у випадку малих відхилень від положення рівноваги (у квадратичному наближенні).

**Задача 20°.** Дослідити одновимірний рух частинки маси  $m$  у полі сталої сили  $\vec{F}_0$ , вважаючи, що на неї діє пропорційна швидкості сила тертя:  $F_d = -\alpha \dot{x}$ . Розглянути граничні випадки  $x(\infty)$ ,  $\dot{x}(\infty)$ .

**Задача 21.** Частинка маси  $m$  рухається під дією сталої сили  $\vec{F}_0$  без початкової швидкості. Дослідити одновимірний рух частинки, вважаючи, що на неї діє пропорційна квадрату швидкості сила тертя:  $F_d = \alpha v^2$ . Розглянути граничні випадки  $\vec{r}(\infty)$ ,  $\dot{\vec{r}}(\infty)$ .

**Задача 22°.** Наближено описати рух частинки маси  $m$  в околі точки повороту в потенціалі  $U(x)$ .

*Вказівка:* У околі точки повороту потенціал розкласти в ряд Тейлора, зберігаючи необхідну кількість доданків.

► У задачах ??-?? знайти період фінітного руху частинки маси  $m$  у вказаних потенціалах. Всі сталі параметри вважати додатними.

**Задача 23°.** 
$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & \text{якщо } x \in [-a, a], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-a, a]. \end{cases}$$

**Задача 24°.**  $U(x) = \alpha|x|$ .

**Задача 25°.**  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ .

► У задачах ??-?? знайти період фінітного руху частинки маси  $m$  у вказаних потенціалах. Знайти частоту коливань для малих відхиленнях частинки від положення рівноваги. Всі сталі параметри вважати додатними.

**Задача 26°.**  $U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$  (потенціал Морзе).

**Задача 27°.**  $U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$ .

**Задача 28°.**  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ .

**Задача 29°.**  $U(x) = \alpha|x|^n$ .

**Задача 30.**  $U(x) = -U_0 \cos \frac{x}{a}$ , якщо задані такі початкові умови  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \sqrt{4U_0/m}$ .

**Задача 31\*.**  $U(x) = -U_0 \cos \frac{x}{a}$ , для довільних початкових умов.

**Задача 32.** Знайти траєкторію  $x(t)$  та період  $T$  фінітного руху частинки маси  $m$  у потенціалі

$$U(x) = -\frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{6},$$

якщо задані такі початкові умови  $x(0) = 3k/\alpha$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , де  $\alpha, k > 0$ .

**Задача 33.** Частинка маси  $m$  рухається в потенціалі  $U(x) = \alpha x^4$  при  $\alpha > 0$ . Знайти траєкторію руху частинки, якщо  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

**Задача 34.** Знайти траєкторію  $x(t)$  руху частинки маси  $m$  у потенціалі

$$U(x) = -\frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4},$$

якщо задані такі початкові умови  $x(0) = \sqrt{2k/\alpha}$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , де  $\alpha, k > 0$ .

**Задача 35\*.** Розв'язати задачу ?? для довільних початкових умов.



**Задача 36\***. Розв'язати задачу ?? для довільних початкових умов.

**Задача 37.** Знайти траєкторію  $x(t)$  руху частинки маси  $m$  у потенціалі

$$U(x) = -U_0 e^{-x/a} \text{ при } U_0 > 0,$$

якщо задані такі початкові умови  $x(0) = 0, \dot{x}(0) > \sqrt{2U_0/m}$ .

**Задача 38.** Знайти зміну закону руху частинки (в області без точок повороту) та поправку до періоду при зміні потенціалу  $U(x)$  на малу величину  $\delta U(x)$ . Для потенціалу  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$  розглянути випадки

$$1) \delta U(x) = \frac{\alpha x^3}{3}; \quad 2) \delta U(x) = \frac{\alpha x^4}{4}.$$

**Задача 39\***. Довести формулу асимптотичного розкладу зміни періоду фінітного руху при малій зміні потенціалу на малу величину  $U \rightarrow U^* = U + \delta U$ :

$$T^*(E) = \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dE^n} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{[\delta U(x)]^n}{\sqrt{E - U(x)}} dx,$$

де  $T(E)$  — період фінітного руху у незбуреному потенціалі  $U(r)$ ,  $x_{1,2}(E)$  — точки повороту.

**Задача 40\***. Знайти форму потенціалу, для якого період фінітного руху не залежить від значення енергії.

*Вказівка:* інтеграл  $T(E)$  є функцією параметра  $E$ , тому в принципі допустимі операції диференціювання, інтегрування та граничного переходу відносно  $E$ . Однак, обчислення похідної — не коректне (покажіть це). Відтак, залишається інтегрування виразу з  $T(E)$  по змінній  $E$  і подальше врахування  $T(E) = \text{const}$ .

### 1.3. Рух зарядженої частинки в електромагнітному полі

Дія електромагнітного поля на заряджену частинку визначається силою Лоренца

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

(у системі СГС).

**Задача 41°.** Частинка маси  $m$ , рухаючись з швидкістю  $\vec{v}_1$ , переходить із півпростору з постійною потенціальною енергією  $U_1$  у півпростір, в якому її потенціальна енергія теж постійна і рівна  $U_2$ . Визначити зміну напрямку руху частинки.

**Задача 42°.** Дослідити рух частинки з масою  $m$  і зарядом  $e$ , яка влітає в однорідне стаціонарне електричне поле  $\vec{E}$ . Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 43°.** Розв'язати попередню задачу ??, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна першій степені швидкості:  $\vec{F}_d = -\alpha \dot{\vec{r}}$ .

**Задача 44°.** Частинка з масою  $m$  і зарядом  $-|e|$  влітає в однорідне стаціонарне електричне поле  $\vec{E}$  із швидкістю  $\vec{v}_0$ , паралельною до напрямку поля. Через який час частинка повернеться у вихідну точку?

**Задача 45°.** Частинка з масою  $m$  і зарядом  $e$  попадає в однорідне електричне поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  із швидкістю  $\vec{v}_0$ , перпендикулярною до напрямку поля. Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 46°.** Розв'язати задачу ??, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна до швидкості:  $\vec{F}_d = -\alpha \vec{v}$ . Описати рух частинки в просторі швидкостей.

**Задача 47°.** Частинка з масою  $m$  і зарядом  $e$  попадає в однорідне стаціонарне магнітне поле  $\vec{H}$  із швидкістю  $\vec{v}_0$ . Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 48°.** Розв'язати задачу ??, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна до швидкості:  $\vec{F}_d = -\alpha \vec{r}$ . Описати рух частинки в просторі швидкостей.

**Задача 49.** Дослідити рух зарядженої частинки в однорідних стаціонарних магнітному  $\vec{H}$  та електричному  $\vec{E}$  полях, кут між якими  $\alpha$ , якщо початкова швидкість частинки  $\vec{v}_0 \perp \vec{E}, \vec{H}$ . Дослідити залежність форми траєкторії від початкових умов. Знайти швидкість дрейфу частинки.

**Задача 50.** Дослідити рух зарядженого осцилятора в однорідному стаціонарному магнітному полі  $\vec{H}$  (класичний ефект Зеємана).

**Задача 51.** Дослідити рух осцилятора в однорідних взаємно перпендикулярних стаціонарному магнітному  $\vec{H}$  та періодичному електричному  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  полях. На яких частотах буде спостерігатися резонанс в такій системі?

**Задача 52.** Дослідити рух зарядженої матеріальної точки в однорідних взаємно перпендикулярних стаціонарному магнітному  $\vec{H}$  та періодичному електричному  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  полях за наявності тертя  $\vec{F}_d = -\alpha \dot{\vec{r}}$  (циклотронний резонанс). Знайти середню потужність, яка поглинається частинкою. Яке значення має орієнтація полів?

**Задача 53.** Заряджена частинка рухається в однорідних стаціонарних полі тяжіння  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  та магнітному полі з індукцією  $\vec{B} = (0, B, 0)$ . Знайти межі області руху частинки по координаті  $z$ , якщо в початковий момент  $\vec{r}(0) = (0, 0, H)$ ,  $\vec{v}(0) = (0, 0, v_0)$ .

**Задача 54.** Електрон рухається в магнітному полі з індукцією  $\vec{B} = (0, 0, B \cos ay)$ . Знайти його траєкторію руху, якщо  $\vec{r}(0) = 0$ ,  $\vec{v}(0) = (0, \omega/a, 0)$ .

**Задача 55.** Частинка маси  $m$  рухається під дією зовнішньої сили  $\vec{F} = \alpha \vec{r}$ , де  $\vec{r}$  — радіус-вектор частинки. Знайти траєкторію руху частинки, якщо її початкове положення  $\vec{r}_0$ , а початкова швидкість  $\vec{v}_0$  напрямлена перпендикулярно вектору  $\vec{r}_0$ .

**Задача 56\*.** Дослідити рух частинки маси  $m$  у полі магнітного монополя  $\vec{H} = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}$ .

**Задача 57.** Знайти інтеграли руху для частинки маси  $m$  та заряду  $e$  у полі постійного лінійного струму  $\vec{I} = I\vec{e}_z$ .

**Задача 58\*.** Знайти середню потужність, яка поглинається просторовим осцилятором під час його взаємодії з плоскою електромагнітною хвилею.

#### 1.4. Рух у центральному полі

Для руху частинки маси  $m$  у центральному полі  $U(r)$ :

- закон її радіального руху  $r(t)$  визначається квадратурою:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}};$$

- залежність азимутального кута від часу  $\varphi(t)$  має вигляд:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L dt}{mr^2(t)};$$

- рівняння траєкторії частинки  $r = r(\varphi)$  визначається квадратурою:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}},$$

де  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  — ефективний потенціал, а величини сталих  $t_0$ ,  $\varphi_0$ , енергії  $E$  та моменту імпульсу  $L$  визначаються початковими значеннями координат та швидкостей частинки.

У випадку фінітного руху частинки умова замкнутості траєкторії має вигляд

$$k \Delta\varphi = 2\pi n, \quad k, n \in Z,$$

де  $\Delta\varphi$  — кут повороту радіус-вектора частинки за один період її радіального руху.

Схема розв'язку задачі аналогічна задачі про одновимірний рух із заміною фізичного потенціалу на ефективний.

**Задача 59°.** Якісно описати рух частинки маси  $m$  у потенціалі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3}$  при різних значеннях енергії та моменту імпульсу, якщо  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 60°.** Дослідити рух частинки маси  $m$  у потенціалі

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & \text{якщо } 0 < r < R, \\ 0, & \text{якщо } R < r < \infty, \end{cases}$$

при  $U_0 > 0$  (“сферична потенціальна яма”).

**Задача 61°.** Дослідити рух частинки (знайти  $r(t)$  і  $\varphi(t)$ , рівняння траєкторії  $r(\varphi)$  та зобразити її графік, визначити точки повороту, період радіального руху та період обертання) у потенціалі  $U(r) = \frac{kr^2}{2}$  при  $\alpha > 0$ .

**Задача 62°.** Дослідити рух частинки маси  $m$  у кулонівському потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ . Розглянути випадки відштовхування ( $\alpha > 0$ ) та притягання ( $\alpha < 0$ ). Знайти закон радіального руху  $r(t)$ , рівняння траєкторії  $r(\varphi)$  руху частинки, визначити точки повороту, період радіального руху та період обертання.

**Задача 63°.** Довести, що під час руху частинки у потенціалі Кулона  $U(r)$  векторна величина

$$\vec{A} = \vec{L} \times \dot{\vec{r}} - \vec{r}U(r)$$

(вектор Рунге-Ленца) є інтегралом руху. Використовуючи цей інтеграл, знайти рівняння траєкторії руху частинки.

**Задача 64.** Знайти залежність координат частинки від часу при русі в полі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  при  $\alpha > 0$  з енергією  $E = 0$  (по параболі).

**Задача 65.** Знайти час падіння частинки в центр силового поля  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  із заданої відстані  $R$  з початковою нульовою швидкістю.

**Задача 66.** Повна енергія частинки маси  $m$ , що рухається в центральному полі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \ln \frac{r}{a}$  дорівнює нулю ( $\alpha > 0$ ). Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 67.** Частинка маси  $m$  з повною енергією  $E = 0$  рухається в центральному полі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^6}$ , де  $\alpha > 0$ . Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 68.** Частинка маси  $m$  з повною енергією  $E = 0$  рухається в потенціалі

$$U(r) = -\frac{U_0}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}, \quad \text{де } U_0 > 0, a > 0.$$

Знайти траєкторію руху частинки.

**Задача 69.** Знайти потенціал центрального поля, якщо траєкторія руху частинки в ньому має вигляд  $r = c/\varphi$ , де  $c = \text{const}$ .

**Задача 70.** Частинці маси  $m$ , що перебувала на відстані  $r_0$  від центру поля  $U(r) = \alpha r^3/3$ , надано швидкість  $\vec{v}_0$ , напрямлену під кутом  $\pm\pi/2$  до силового центру. Для якого значення швидкості  $v_0$  частинка буде рухатися по колу?

**Задача 71°.** Дослідити рух частинки маси  $m$  у потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ , де  $\alpha > 0$  (відштовхування) та  $\alpha < 0$  (притягання). Знайти  $r(t)$ , рівняння траєкторії  $r(\varphi)$  (побудувати її графік), визначити точки повороту та період фінітного руху. Розглянути випадки:

- 1)  $\alpha > 0$ , знайти кут розсіяння (кут  $\delta\varphi$  між асимптотами);
- 2)  $-\frac{L^2}{2m} < \alpha < 0$ , знайти кут розсіяння. Для яких початкових умов частинка, зробивши ціле число оборотів навколо центру, повертається назад?
- 3)  $\alpha = -\frac{L^2}{2m}$  та  $\alpha < -\frac{L^2}{2m}$ .

Розглядаючи відповідь  $r(\varphi, \alpha)$  як функцію  $\alpha$  описати перехід розв'язку для  $\alpha > -L^2/2m$  в розв'язок з  $\alpha < -L^2/2m$  через  $\alpha = -L^2/2m$ .

**Задача 72°.** Дослідити рух частинки в потенціалі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$  при значеннях параметрів  $\alpha, \beta > 0$ . Знайти траєкторію  $r(\varphi)$  руху частинки, кут  $\Delta\varphi$  між двома послідовними мінімальними значеннями  $r$ . За яких умов траєкторія руху частинки — замкнена крива? Визначити період радіальних коливань  $T_r$  та період обертання  $T_\varphi$  частинки.

**Задача 73°.** Дослідити рух частинки з масою  $m$  та енергією  $E$  у полі  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$  для значень параметрів  $\alpha, \beta > 0$ . Знайти траєкторію  $r(\varphi)$  руху частинки і побудувати її графік для таких випадків:

- 1)  $\beta > \frac{L^2}{2m}$  при  $E > U_{\max}$ ,  $E = U_{\max}$  та  $E < U_{\max}$ ;
- 2)  $\beta = \frac{L^2}{2m}$ ;
- 3)  $\beta < \frac{L^2}{2m}$

де  $U_{\max}$  — максимум ефективного потенціалу. Для випадку 1 знайти час падіння частинки в центр поля із заданої відстані  $R$ . Визначити скільки обертів навколо центру зробить при цьому частинка.

**Задача 74.** Дослідити рух частинки в потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$  при значеннях параметрів  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 75.** Дослідити рух частинки в потенціалі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$  при значеннях параметрів  $\alpha, \beta > 0$ .

► У задачах ??-?? дослідити, за яких умов можливий фінітний рух частинки у заданому потенціальному полі  $U(r)$ .

**Задача 76.**  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}e^{-kr}$ , при  $\alpha, k > 0$ .

**Задача 77.**  $U(r) = -U_0e^{-k^2r^2}$ , при  $U_0, k > 0$ .

**Задача 78\*.** Частинка падає із скінченної відстані в центр поля  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$  при  $\alpha > 0$ . Чи буде число обертів навколо центру, зроблених при цьому частинкою, скінченним? Чи буде скінченним час падіння? Знайти траєкторію руху частинки для малих значень  $r$ .

**Задача 79\*.** Знайти закон руху і траєкторію частинки, яка рухається у потенціалі  $U = \frac{\alpha}{r^2}$  і у постійному магнітному полі  $\vec{H}$ , перпендикулярному до площини орбіти.

**Задача 80\*.** Дослідити рух частинки у потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r^4}$ .

## 1.5. Зіткнення та розсіювання частинок

Ефективний диференціальний переріз розсіювання дається виразом

$$d\sigma = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds(\chi)}{d\chi} \right| d\chi.$$

Для частинки маси  $m$ , що рухається в розсіюючому потенціалі  $U(r)$ , залежність її прицільної відстані  $s$  від кута розсіювання  $\chi$  визначається системою рівнянь

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|, \quad \varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{s \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}},$$

де  $r_{\min}$  — значення радіуса, для якого вираз, що стоїть під знаком радикала, обертається в нуль,  $v_{\infty}$  — швидкість частинки на нескінченності.

**Задача 81°.** Визначити умови на потенціал, при яких можливе падіння частинки в центр силового поля.

**Задача 82°.** Знайти диференціальний та повний перерізи розсіювання частинок на жорсткій сфері радіуса  $R$ .

► У задачах ??-?? Знайти диференціальний та повний перерізи розсіювання частинок з швидкістю  $\vec{v}_{\infty} = v_{\infty} \vec{e}_z$  на поверхнях обертання  $r = r(z)$ , заданих у циліндричній системі координат.

**Задача 83.**  $r(z) = a \sin \alpha z$ , якщо  $z \in [0, \pi/\alpha]$ .

**Задача 84.**  $r(z) = az^{\alpha}$ , якщо  $\alpha \in ]0, 1[$ .

**Задача 85.**  $r(z) = a - \frac{b}{z}$ , якщо  $z \in [b/a, \infty[$ .

**Задача 86°.** Знайти диференціальний переріз розсіювання частинок у потенціалі Кулона  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$  при  $\alpha > 0$ . За яким законом прямує до нескінченності повний переріз розсіювання?

**Задача 87°.** Знайти диференціальний переріз розсіювання частинок у полі  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  при  $\alpha > 0$ .

**Задача 88°.** Знайти повний переріз падіння частинок у центр поля  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  при  $\alpha < 0$ .

**Задача 89\*.** Знайти диференціальний переріз розсіювання частинок у полі  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  при  $\alpha < 0$  (частинка робить кілька обертів навколо центру поля).

**Задача 90.** Знайти диференціальний переріз розсіювання частинок сферичним “потенціальним горбом”

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R, \end{cases} \quad \text{де } U_0 > 0.$$

**Задача 91.** Знайти диференціальний переріз розсіювання частинок у потенціалі

$$U(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{R} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R, \end{cases}$$

де  $\alpha > 0, R > 0$

► У задачах ??-?? Знайти повний переріз падіння частинок у центр вказаного потенціального поля.

**Задача 92.**  $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  при  $\alpha < 0$ .

**Задача 93.**  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$  при  $\alpha, \beta > 0$ . За яких умов падіння в центр силового поля не реалізується?

**Задача 94.**  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$  при  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 95.**  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$  при  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 96.** Знайти повний переріз падіння частинок на кулю радіуса  $R$ , що знаходиться в центрі силового поля:  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$  при  $\alpha > 0$ .

**Задача 97.** Знайти повний переріз падіння частинок на кулю радіуса  $R$ , що знаходиться в центрі силового поля  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$  при  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 98.** Знайти поправку до диференціального перерізу розсіяння частинки при зміні потенціалу  $U(r)$  на малу величину  $\delta U(r)$ . Розглянути частинний випадок  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  та  $\delta U(r) = \frac{\beta}{r^3}$ .

**Задача 99\*.** Знайти диференціальний переріз розсіяння частинок на малі кути у потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  при  $n > 0$ .

**Задача 100\*.** Відновити потенціал взаємодії  $U(r)$  по відомій залежності диференціального перерізу від кута у  $C$ -системі, вважаючи, що  $U(\infty) = 0$  (обернена задача розсіяння).

**Задача 101.** Частинка маси  $m_1$  налітає із нескінченності з швидкістю  $v$  та прицільним параметром  $s$  на нерухому частинку маси  $m_2$ . Знайти найменшу відстань між частинками, якщо закон їх взаємодії  $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  при  $\alpha > 0$ .

**Задача 102.** Частинка маси  $m_1$  з початковою швидкістю  $\vec{v}_1$  налітає на нерухому частинку маси  $m_2$  і розсіюється на кут  $\theta$ . Знайти кут розсіяння  $\chi$  частинки в системі центру мас, передану частину кінетичної енергії та відношення мас частинок, для якого передана енергія буде максимальною.

## Розділ 2

### Механіка Лагранжа

#### 2.1. Рівняння Лагранжа I роду

Для механічної системи  $N$  частинок з голономними зв'язками  $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ ,  $\alpha = \overline{1, s}$  рівняння Лагранжа I роду мають вигляд

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, \quad i = \overline{1, N},$$

де  $\lambda_\alpha$  — невизначені множники Лагранжа.

Вирішення основної задачі механіки такої голономної системи зводиться до розв'язання системи рівнянь Лагранжа I роду сумісно з рівняннями зв'язків. Сили реакції  $\vec{R}_i$  в цьому випадку визначаються виразом  $\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha$ .

**Задача 103.** Частинка маси  $m$  ковзає в однорідному полі сили тяжіння по гладкій похилій площині з кутом нахилу  $\alpha$ . Знайти закон руху частинки і силу реакції поверхні.

**Задача 104.** Дві частинки з масами  $m_1$  і  $m_2$  зв'язані нерозтяжною невагомою ниткою, яка перекинута через невагомий блок, рухаються в однорідному полі сили тяжіння. Знайти закон руху частинок та реакцію зв'язку.

**Задача 105.** Частинка маси  $m$  починає рухатися в однорідному полі сили тяжіння з висоти  $h$  з нульовою початковою швидкістю по гладкій нерухомій параболі  $y^2 = ax$ , розташованій у вертикальній площині (вісь параболі горизонтальна). Визначити, на якій висоті частинка відірветься від параболі.

**Задача 106.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій сфері радіуса  $R$ . Знайти: а) реакцію сфери як функцію координат та швидкості частинки; б\*) закон руху частинки в циліндричних та сферичних координатах.

**Задача 107.** Матеріальна точка маси  $m$  рухається по гладкому нерухомому еліпсоїду з півосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  під дією сили  $\vec{F} = -\alpha\vec{r}$ , де  $\vec{r}$  — радіус-вектор матеріальної точки, проведений з центру еліпсоїда. Знайти силу реакції зв'язку як функцію положення та швидкості матеріальної точки.

**Задача 108.** Частинка маси  $m$  закріплена на кінці невагомого твердого стержня довжини  $l$  і знаходиться в однорідному полі сили тяжіння. Другий кінець стержня шарнірно закріплено так, що частинка може рухатися тільки у вертикальній площині. Не враховуючи тертя, знайти закон руху частинки та реакцію зв'язку. Знайти частоту малих коливань поблизу положення рівноваги.

**Задача 109.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій внутрішній поверхні конуса  $\alpha^2 z^2 = x^2 + y^2$ . Знайти силу реакції зв'язку.



**Задача 110.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій горизонтальній площині, яка коливається в вертикальному напрямку з амплітудою  $a$  і частотою  $\omega$ . Знайти положення частинки та реакцію зв'язку як функції часу.

**Задача 111.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по внутрішній поверхні прямого вертикального циліндра радіуса  $R$ . Вважаючи поверхню циліндра абсолютно гладкою, знайти закон руху частинки та силу тиску частинки на циліндр. Початкова швидкість частинки  $\vec{v}_0$  складає кут  $\alpha$  з горизонтом.

**Задача 112.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій вертикальній циліндричній поверхні. Знайти закон руху частинки та силу реакції зв'язку, якщо радіус циліндричної поверхні збільшується з часом зі сталою швидкістю  $u_0$ .

**Задача 113.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння по лінії перетину нерухомої гладкої сфери радіуса  $R$  з гладкою горизонтальною площиною, яка рухається у вертикальному напрямку по закону  $z(t) = R \sin \omega t$ . Знайти закон руху частинки і реакцію зв'язку для  $0 \leq t \leq \pi/2\omega$ .

## 2.2. Рівняння Лагранжа другого роду

Для голономної механічної системи з узагальненими координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$  рівняння Лагранжа II роду мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тут  $L$  — функція Лагранжа, що визначається як  $L = T - U$ ;  $T$  — кінетична,  $U$  — потенціальна енергії системи.

**Задача 114°.** Знайти закон руху для системи з функцією Лагранжа

$$L(x, \dot{x}, t) = t\sqrt{1 + \dot{x}^2}.$$

**Задача 115°.** Побудувати в циліндричній, сферичній та параболічній системах координат функцію Лагранжа для вільної частинки. Знайти розв'язки рівнянь руху у кожному випадку.

**Задача 116°.** Записати в циліндричній і сферичній системах координат функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду для частинки маси  $m$ , що рухається у таких потенціалах:

$$1) U(\vec{r}) = U(r); \quad 2) U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}, \text{ де } \vec{F} = \text{const}.$$

**Задача 117.** Знайти інтеграли руху частинки маси  $m$ , що рухається у потенціалі  $U(\vec{r})$ :

- 1)  $U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{F} = \text{const}$ ;
- 2)  $U(\vec{r})$  — однорідна функція  $\vec{r}$ , тобто  $U(\alpha\vec{r}) = \alpha^n U(\vec{r})$ ;
- 3)  $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} - \vec{v}t)$ , де  $\vec{v} = \text{const}$ .

**Задача 118°.** Записати функцію Лагранжа і рівняння руху частинки з масою  $m$  і зарядом  $e$  у стаціонарному однорідному магнітному полі  $\vec{H}$  у декартових та циліндричних координатах. Знайти інтеграли руху частинки.

**Задача 119°.** Побудувати функцію Лагранжа диполя, утвореного двома протилежно зарядженими масами  $m_1$  і  $m_2$ , що знаходяться в однорідному електричному полі  $\vec{E}$ .

**Задача 120.** У сферичній системі координат знайти інтеграли руху частинки, що рухається в магнітному полі  $\vec{H} = \alpha\vec{r}/r^3$ .

**Задача 121.** Знайти інтеграли руху частинки маси  $m$ , що рухається в електромагнітному полі з векторним потенціалом  $\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$ , де  $\vec{\mu} = \text{const}$  (магнітний момент).

**Задача 122.** Записати в сферичній системі координат функцію Лагранжа

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + U(r),$$

де  $m, c$  — сталі величини.

**Задача 123\*.** Знайти траєкторію релятивістської частинки у потенціалі Кулона:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + \frac{\alpha}{r}.$$

**Задача 124.** Знайти вигляд функції Лагранжа із задачі ?? при такій заміні координат (перетворення Лоренца):

$$x' = x \operatorname{ch} \varphi + ct \operatorname{sh} \varphi, \quad ct' = x \operatorname{sh} \varphi + ct \operatorname{ch} \varphi.$$

**Задача 125°.** Знайти закон руху системи з функцією Лагранжа

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x) - \frac{k_1 x^2}{2} - \frac{k_2 y^2}{2}.$$

**Задача 126\*.** Заряд рухається по сферу, центр якої знаходиться у початку координат під дією магнітного поля з вектор-потенціалом  $\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$  (диполь). Знайти межі руху заряду по куту  $\theta$ .

**Задача 127.** Два силових центри знаходяться на відстані  $2a$  один від іншого. Знайти закон руху частинки маси  $m$ , якщо потенціал її взаємодії з кожним із центрів — кулонівський.

**Задача 128\*.** Знайти період коливань частинки, яка рухається у полі двох однакових центрів (задача ??, випадок притягання). Частинка рухається вздовж прямої, яка перпендикулярна до відрізка, що з'єднує центри.

**Задача 129\*.** Знайти розв'язок задачі Кеплера к системі координат, яка обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ .

### 2.3. Побудова функції Лагранжа для системи частинок

Для побудови функції  $L$  та запису рівнянь руху можна дотримуватись такого алгоритму:

- 1) записати  $L = T - U$  у декартових координатах, вибираючи інерціальну систему відліку (часто пов'язану з нерухомою точкою);
- 2) записати зв'язки  $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$  у декартових координатах;
- 3) вибрати узагальнені координати  $\{q_i : i = \overline{1, n}\}$  так, щоб рівняння зв'язків задовольнялися тотожно:

$$f_\alpha(\vec{r}(q, t), t) \equiv 0.$$

Це відповідає запису співвідношень, які описують поверхню зв'язків, у параметричному вигляді;

У багатьох випадках залишається ще деякий елемент довільності у виборі узагальнених координат. Остаточний вибір можна зробити з міркувань зручності та простоти функції Лагранжа. Мотивації вибору узагальнених координат можна розбити за пріоритетами:

- а) вони задовольняють зв'язки;
  - б) вони приводять до простої функції  $L$  (якщо ще є можливість вибору);
- 4) виразити швидкості  $\dot{r}_i$  через узагальнені швидкості та координати;
  - 5) підставити вирази  $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$  та  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(q, \dot{q}, t)$  до  $L = T - U$  і спростити вираз.

**Задача 130°.** Побудувати функцію Лагранжа диполя, утвореного двома протилежно зарядженими масами  $m_1$  і  $m_2$ , що знаходяться в однорідному електричному полі  $\vec{E}$ .

► У задачах ??-?? побудувати функцію Лагранжа та знайти закон руху частинки маси  $m$ , що рухається в однорідному полі сили тяжіння по вказаній гладенькій кривій.

**Задача 131°.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (еліпс).

**Задача 132°.**  $y = \sqrt{x^2 + a^2}$  (гіпербола).

**Задача 133°.**  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $z = b\varphi$  (спіраль).

**Задача 134°.**  $x = R(\varphi + \sin \varphi)$ ,  $y = R(1 - \cos \varphi)$  (циклоїда).

Вказівка: Ввести змінну  $\xi = 4R \sin \frac{\varphi}{2}$ .

► У задачах ??-?? побудувати функцію Лагранжа та знайти закон руху частинки маси  $m$ , що рухається в однорідному полі сили тяжіння по вказаній гладенькій поверхні.

**Задача 135°.**  $x^2 + y^2 = a^2 z^2$  (конус).

**Задача 136°.**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  (сфера).

**Задача 137°.**  $a^2 z = x^2 + y^2$  (параболоїд).

**Задача 138°.**  $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1$  (гіперпараболоїд).

**Задача 139°.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (еліпсоїд).

Вказівка: перейти до еліптичних координат.

► У задачах ??-?? побудувати функцію Лагранжа до вказаної механічної системи, записати рівняння руху, виконати аналіз інтегровності у квадратурах. У випадку існування положення рівноваги для системи з однією ступінню вільності знайти частоту малих коливань (вказано у задачі). Основні параметри системи вказані на рисунках.

Всі маятники вважаються негнучкими, нерозтяжними та невагомими. Пружини — негнучкі та невагомі, параметри пружин  $k$ ,  $a$  означають жорсткість та довжину у недеформованому стані відповідно.

**Задача 140°.** Плоский математичний маятник з нерухомою точкою підвісу у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 141\*.** Розв'язати задачу ?? (скористатись законом збереження енергії). Розглянути обидва сценарії руху:

- 1) обертання маятника навколо точки підвісу;
- 2) коливання.

У обох випадках знайти період.

**Задача 142\*.** Дослідити загальний рух тривимірного математичного маятника.

**Задача 143°.** Плоский математичний маятник, точка підвісу якого рухається по вертикалі за законом  $f(t)$ , у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 144°.** Розв'язати задачу ??, якщо точка підвісу маятника рухається по горизонталі за законом  $f(t)$ .

**Задача 145°.** Плоский математичний маятник, точка підвісу рівномірно обертається по колу радіуса  $R$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 146.** Розв'язати задачу ??, якщо точка підвісу маятника обертається у горизонтальній площині (тривимірний рух). Знайти період малих коливань.

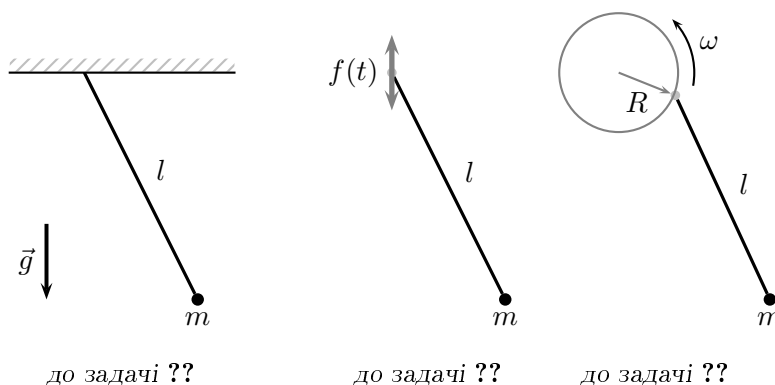


Рис. 2.1. До задач ??-??.

**Задача 147°.** Частинка підвішена за пружину, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (рис. ??).

**Задача 148°.** Частинка рухається вздовж маятника і прикріплена до пружини, вільний кінець якої спільний з вільним кінцем маятника (рис. ??). Вважати, що під час руху геометрична конфігурація зберігається.

**Задача 149°.** Частинка рухається вздовж горизонтальної прямої і прикріплена до пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці на висоті  $l$  (рис. ??). Записати функцію Лагранжа, знайти частоту малих коливань. Розглянути випадки  $l < a$ ,  $l > a$  та  $l = a$ .

**Задача 150°.** Дві однакові частинки маси  $m$  з'єднані невагомим стержнем. Одна частинка рухається вздовж вертикальної прямої, а друга — вздовж горизонтальної. Відстань між прямими значно менша в порівнянні з довжиною стержня.

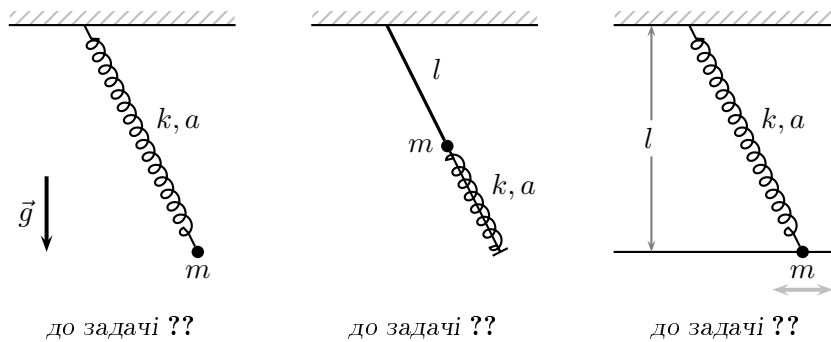


Рис. 2.2. До задач ??-??.

**Задача 151°.** Частинка підвішена до маятника та пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (у полі сили тяжіння, рис. ??).

**Задача 152°.** Частинка підвішена до маятника та пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (у полі сили тяжіння, рис. ??). У положенні рівноваги пружина горизонтальна.

**Задача 153°.** Два плоских маятника з'єднано пружиною (у полі сили тяжіння, рис. ??). У положенні рівноваги пружина горизонтальна.

**Задача 154°.** Частинки з масою  $m_1$  ковзає по горизонтальній прямій, частинка з масою  $m_2$  з'єднана з нею за допомогою маятника (рис. ??).

**Задача 155°.** Розв'язати задачу ??, якщо пряма нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонталі.

**Задача 156°.** Частинки з масою  $m_1$  ковзає по горизонтальній прямій, частинка з масою  $m_2$  з'єднана з нею за допомогою пружини (рис. ??).

**Задача 157°.** Частинки з масою  $m_1$  ковзає по горизонтальній прямій і з'єднана пружиною з нерухомою точкою, частинка з масою  $m_2$  з'єднана з частинкою  $m_1$  за допомогою маятника (рис. ??).

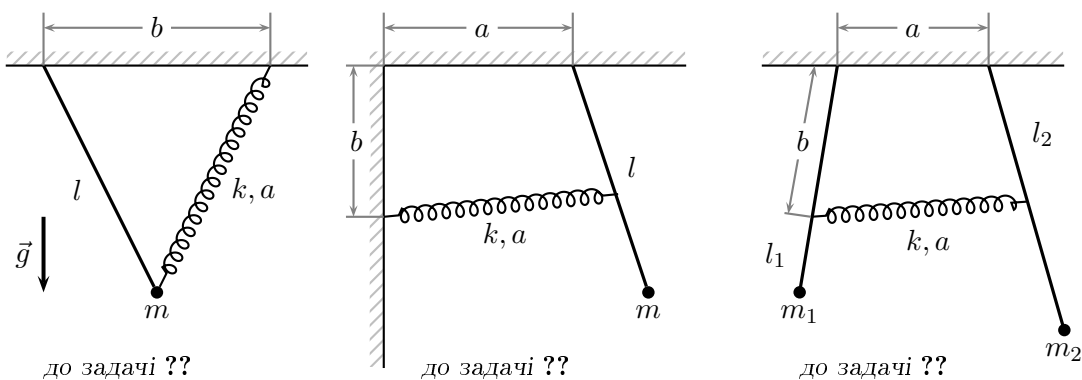


Рис. 2.3. До задач ??-??.

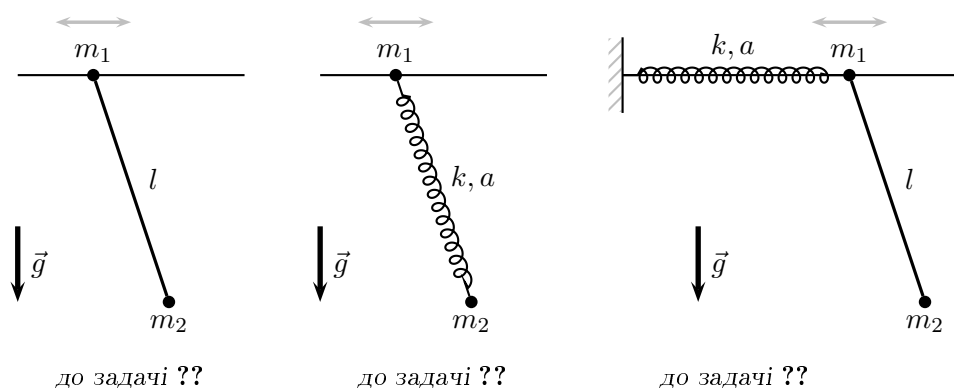


Рис. 2.4. До задач ??-??.

**Задача 158°.** Частинки з масами  $m_1$  та  $m_3$  ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою  $m_2$  з'єднана з частинкою  $m_1$  за допомогою маятника (рис. ??).

**Задача 159°.** Частинки з масами  $m_1$  та  $m_2$  ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою  $m_3$  з'єднана з ними однаковими маятниками (рис. ??).

**Задача 160°.** Частинки з масами  $m_1$  та  $m_2$  ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою  $m_3$  з'єднана з ними однаковими пружинами (рис. ??).

**Задача 161°.** До кінців горизонтальної пружини, що вільно ковзає по горизонтальній прямій, приєднано два математичних маятники (рис. ??).

**Задача 162°.** До кінців частинки, що ковзає по горизонтальній прямій приєднані маятники, кінці яких з'єднано пружиною (рис. ??).

**Задача 163°.** До кінців частинки, що ковзає по горизонтальній прямій приєднано маятник та пружину з іншими частинками. Пружина напрямлена весь час вздовж маятника (рис. ??).

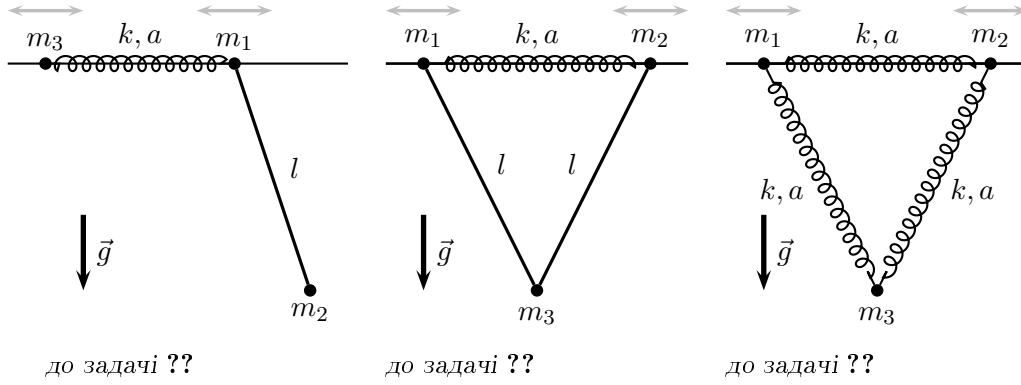


Рис. 2.5. До задач ??-??.

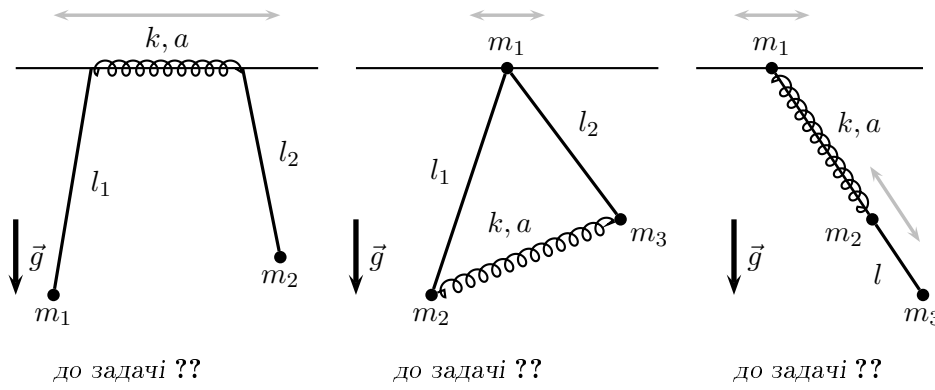


Рис. 2.6. До задач ??-??.

**Задача 164°.** До кінця математичного маятника з нерухомим початком причеплено інший маятник (подвійний маятник, рис. ??).

**Задача 165°.** Нижню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. ??).

**Задача 166°.** Верхню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. ??).

**Задача 167°.** Кінці подвійного маятника з'єднано пружиною (рис. ??).

**Задача 168°.** До математичного маятника прикріплено "гантельку" з двох частинок, яка може обертатись у площині (маятник Томсона, рис. ??).

**Задача 169°.** Нижня частинка подвійного маятника ковзає вздовж вертикальної прямої, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. ??).

**Задача 170°.** У системі з задачі ?? верхню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. ??).

**Задача 171°.** У системі з задачі ?? нижню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. ??).

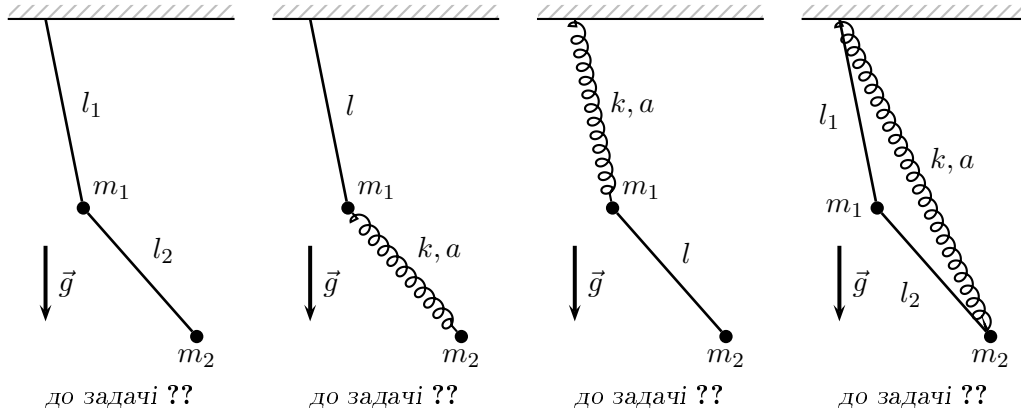


Рис. 2.7. До задач ??-??.

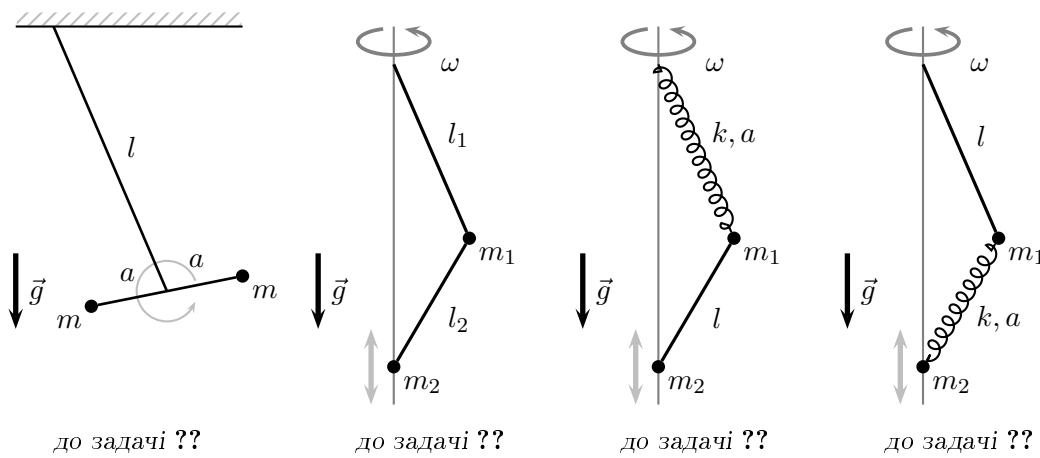


Рис. 2.8. До задач ??-??.

**Задача 172°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо вертикальної осі, що проходить через геометричний центр, у полі сили тяжіння. Знайти частоти малих коливань для всіх можливих положень рівноваги, та вказати, коли вони реалізуються (рис. ??).

**Задача 173\*.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли частинка ковзає по еліпсу з півосями  $a, b$  (обертання відбувається навколо однієї з головних осей).

**Задача 174°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через геометричний центр, у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 175°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо вертикальної осі, що зміщена відносно геометричного центру на задану відстань, у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 176°.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж прямої, яка нахилена на заданий кут до вертикалі і обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. ??). Знайти закон руху частинки:

- 1) безпосереднім інтегруванням рівняння руху;



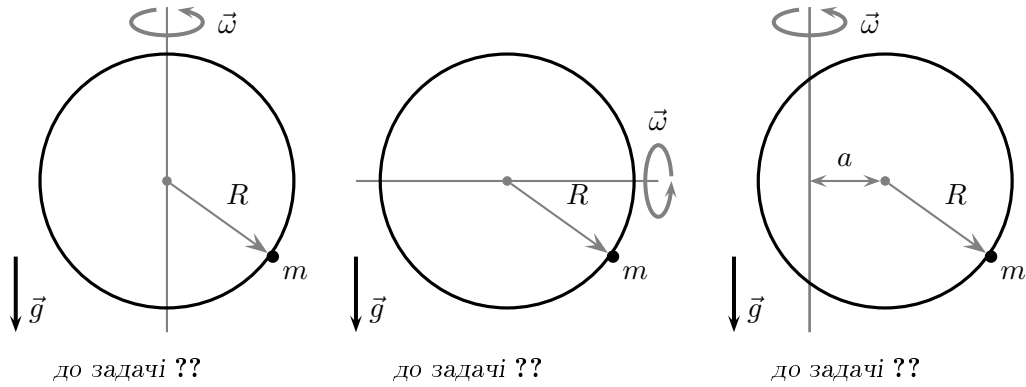


Рис. 2.9. До задач ??-??.

2) за допомогою закону збереження енергії (дослідити різні сценарії руху залежно від початкових умов).

**Задача 177.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж прямої, яка нахилена на заданий кут до вертикалі і обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. ??) і з'єднана з початком координат пружиною. Знайти частоту малих коливань.

**Задача 178.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж кривої  $y = ax^n$ , що обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. ??). Дослідити існування положення рівноваги та знайти частоту малих коливань.

**Задача 179.** Розглянути ідеальне ковзання частинки маси  $m$  в однорідному полі сили тяжіння по замкнутій центральній гладкій кривій  $r(z)$ , яка обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $\vec{n}$ , що проходить через центр кривої. Дослідити малі коливання частинки поблизу положень рівноваги.

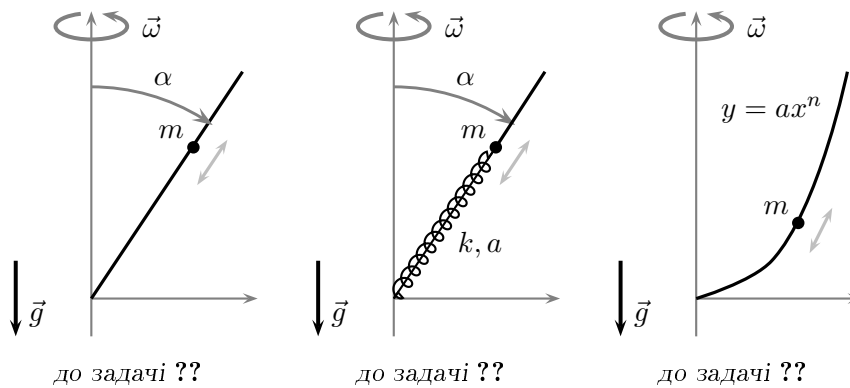


Рис. 2.10. До задач ??-??.

**Задача 180°.** Частинка  $m_1$  ковзає по горизонтальній площині і з'єднана з іншою частинкою  $m_2$  нерозтяжною ниткою довжини  $L$ , яка проходить через отвір у площині. Рух

відбувається у полі сили тяжіння (рис. ??). Розглянути окремо випадок руху  $m_2$  тільки по вертикалі.

**Задача 181°.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли площина нахилена на кут  $\alpha$ .

**Задача 182°.** Частинки  $m_1$  та  $m_2$  з'єднані нерозтяжною ниткою довжини  $L$ , яка проходить через два отвори у площині (рис. ??).

**Задача 183\*.** На коло намотано нерозтяжну нитку, до вільного кінця якої причеплено частинку (рис. ??). Дослідити малі коливання у такій системі (нитку вважати весь час натягнутою, а рух — плоским).

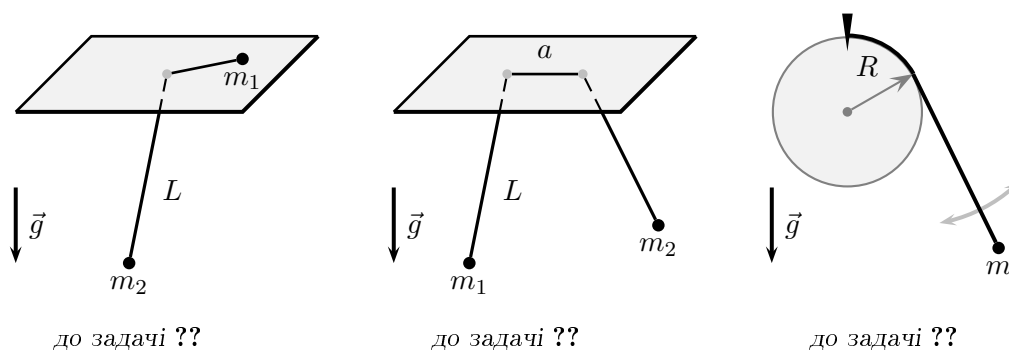


Рис. 2.11. До задач ??-??.

**Задача 184.** Частинка ковзає по колу у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем у точці, що є кінцем вертикального діаметру (рис. ??). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.

**Задача 185.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли пружину закріплено одним кінцем у точці, що є кінцем горизонтального діаметру.

**Задача 186\*.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли коло обертається навколо вертикального діаметра зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ .

**Задача 187\*.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли частинка ковзає по еліпсу (геометричний центр у початку координат, одна з півосей вертикальна).

**Задача 188.** Частинка ковзає по колу у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем у точці, яка розташована на висоті  $l$  від центру кола по вертикалі (рис. ??). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.

**Задача 189.** Частинка ковзає по гіперболі у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем початку координат (рис. ??). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.

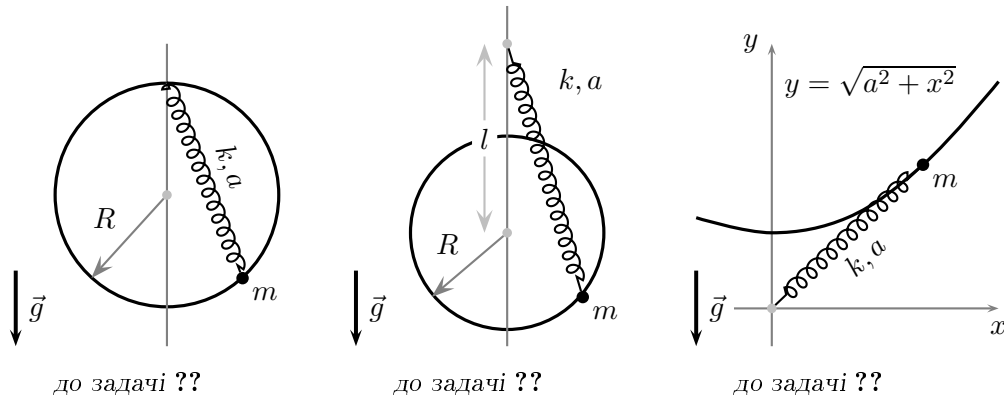


Рис. 2.12. До задач ??-??.

**Задача 190.** Через невагомий блок перекинута невагомий нерозтяжний канат, до одного кінця якого прикріплено вантаж маси  $m_1$ , а по другому — лізе мавпа маси  $m_2$  за заданим законом  $x(t)$  відносно каната. Знайти закон руху вантажу.

**Задача 191\*.** Записати функцію Лагранжа для системи  $N$  математичних маятників у полі сили тяжіння: перший маятник прикріплений до нерухомої точки, до його вільного кінця, де знаходиться маса  $m$  прикріплений другий маятник і т. д. Довжини маятників рівні  $l$ , закріплені на кінцях маси —  $m$ . Розглянути граничний перехід до неперервного середовища, отримати функцію та рівняння Лагранжа.

**Задача 192\*.** До кінця останнього маятника з задачі ?? прикладена стала сила  $\vec{F}$  у горизонтальному напрямку. Знайти кути нахилу маятників.

**Задача 193\*.** Дослідити систему, описану у задачі ??, якщо вільний кінець останнього маятника закріплений на тій же висоті, що і кінець першого маятника. Розглянути граничний перехід до неперервного середовища (ланцюг). Якою кривою описуються профіль системи?

## 2.4. Абсолютно тверде тіло

Швидкість зміни ортів власної системи координат абсолютно твердого тіла (АТТ) з часом описується за допомогою формули Пуансо

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Імпульс  $\vec{P}$ , момент імпульсу  $\vec{L}$ , кінетична енергія  $T$  та потенціальна енергія  $U$  АТТ в однорідному полі сили тяжіння, відповідно, мають вигляд

$$\vec{P} = M(\dot{\vec{R}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_C),$$

$$\vec{L} = M\vec{R}_0 \times \dot{\vec{R}}_0 + M\vec{R}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C) + M\vec{r}'_C \times \dot{\vec{R}}_0 + \hat{I}\vec{\omega},$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_0^2 + M \dot{\vec{R}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega}, \quad U = -M\vec{g} \cdot \vec{R}_0 - M\vec{g} \cdot \vec{r}_C.$$

Тут  $\vec{R}_0$  — радіус-вектор полюса  $O$  АТТ,  $\vec{r}'_C$  — радіус-вектор центра мас АТТ відносно полюса  $O$ ,  $\vec{\omega}$  — вектор кутової швидкості обертання твердого тіла навколо полюса,  $\hat{I}$  — тензор моменту інерції, компоненти якого у власній системі координат мають вигляд

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i \Delta m_i (r_i'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

(або інтеграл для неперервного розподілу маси).

Тоді функція Лагранжа абсолютно твердого тіла визначається як  $L = T - U$ . Схема побудови функції Лагранжа може бути описана такою послідовністю дій:

- 1) записати  $L = T - U$  у зручних (як правило, декартових) координатах, вибираючи інерціальну систему відліку спостерігача (пов'язану з нерухомою точкою); доданок з кутовими швидкостями доцільно записати у власній системі координат (де компоненти тензора інерції сталі), кутову швидкість можна виразити через кути Ейлера за допомогою кінематичних рівнянь (на даному етапі не обов'язково);
- 2) записати геометричні зв'язки типу  $f(\vec{R}_C, t) = 0$  на положення центру мас (якщо вони є), вибрати узагальнені координати для поступальних ступенів вільності;
- 3) записати умови контакту для руху без проковзування (якщо є). В умовах контакту компоненти кутової швидкості зручно записувати у системі спостерігача (оскільки в ній задано швидкість центру мас). Якщо зв'язки інтегровні, виразити залежні координати;
- 4) записати функцію Лагранжа в незалежних координатах.

► У задачах знайти головні моменти інерції вказаних тіл для полюсу у центрі мас. Розподіл маси вважати однорідним, сумарна маса  $m$ .

**Задача 194°.** Стержень довжини  $l$ .

**Задача 195°.** Коло радіуса  $R$ .

**Задача 196°.** Диск радіуса  $R$  (маса розподілена по поверхні).

**Задача 197°.** Прямокутник зі сторонами  $a$  та  $b$  (маса розподілена по поверхні).

**Задача 198°.** Прямокутний паралелепіпед з розмірами  $a \times b \times c$ . Виконати граничний перехід до прямокутника.

**Задача 199°.** Циліндр висоти  $h$  з радіусом основи  $R$ . Виконати граничний перехід до диску.

**Задача 200°.** Порожній циліндр висоти  $h$ , зовнішній радіус  $b$ , а внутрішній  $a$ .

**Задача 201°.** Куля радіуса  $R$ .

**Задача 202°.** Половина кулі радіуса  $R$ .

**Задача 203°.** Сфера радіуса  $R$  (маса розподілена по поверхні).

**Задача 204°.** Порожня куля, зовнішній радіус якої  $b$ , а внутрішній  $a$ .

**Задача 205°.** Конус висоти  $h$  з радіусом основи  $R$ .

**Задача 206°.** Тривісний еліпсоїд з півосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Задача 207.** Тор, середній радіус якого  $R$ , а радіус поперечного перерізу  $a$ .

**Задача 208.** Пряма правильна трикутна призма з висотою  $h$  і стороною основи  $a$ .

**Задача 209.** Пряма правильна шестикутна призма з висотою  $h$  і стороною основи  $a$ .

**Задача 210°.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для стандартної послідовності поворотів  $zxx$  для компонент  $\omega_\alpha$  та  $\omega'_\alpha$ . Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

**Задача 211°.** Нехай кути Ейлера рівні  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Знайти значення кутів Ейлера, якщо рухому систему координат вважати нерухомою, а нерухому — рухомою?

**Задача 212°.** Виразити узагальнені імпульси, що відповідають трьом кутам Ейлера, через кутові швидкості обертання.

**Задача 213.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для послідовності поворотів  $zyz$  для компонент  $\omega_\alpha$  та  $\omega'_\alpha$  (поворот навколо осі  $y$  виконується у від'ємному напрямку). Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

**Задача 214.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для послідовності поворотів  $xuz$  для компонент  $\omega_\alpha$  та  $\omega'_\alpha$ . Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

► У задачах ??-?? побудувати функцію Лагранжа до вказаної механічної системи, записати рівняння руху, виконати аналіз інтегровності у квадратурах. У випадку існування положення рівноваги для системи з однією ступінню вільності знайти частоту малих коливань (вказано у задачі). Основні параметри системи вказані на рисунках.

Всі маятники вважаються негнучкими, нерозтяжними та невагомими. Пружини — негнучкі та невагомні, параметри пружин  $k$ ,  $a$  означають жорсткість та довжину у недеформованому стані відповідно. Всі необхідні для розв'язку геометричні параметри та моменти інерції вважаються відомими.

**Задача 215°.** Циліндр котиться без проковзування по горизонтальній площині (рис. ??).

**Задача 216°.** Розв'язати задачу ??, якщо площина нахилена на кут  $\alpha$  до горизонту (врахувати силу тяжіння). Знайти закон руху циліндра.

**Задача 217\*.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли переріз циліндра еліптичний. Знайти частоту малих коливань.

**Задача 218\*.** Дослідити рух однорідного диску по горизонтальній площині у полі сили тяжіння (без проковзування). За яких умов рух вздовж прямої лінії є стійким?

**Задача 219°.** Циліндр котиться без проковзування по горизонтальній площині, його центр мас з'єднаний пружиною з нерухомою точкою (рис. ??). Пружина під час руху лишається горизонтальною. Знайти частоту малих коливань.

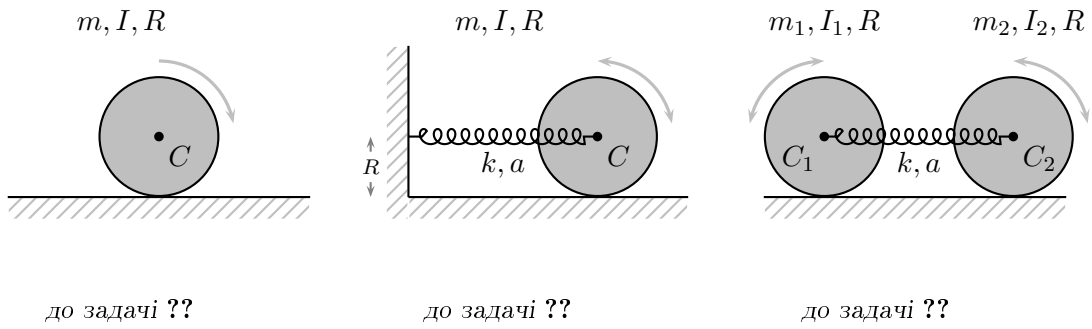


Рис. 2.13. До задач ??-??.

**Задача 220°.** Циліндри з однаковими радіусами котяться без проковзування по горизонтальній площині, їх центри мас з'єднані пружиною (рис. ??).

**Задача 221°.** Порожній циліндр маси  $M$  котиться без проковзування по горизонтальній площині. На його внутрішній поверхні перебуває частинка маси  $m$  (рис. ??). Розглянути випадки:

- 1) частинка вільно ковзає по внутрішній поверхні;
- 2) частинка жорстко приєднана до циліндра. Знайти положення центру мас такої системи та частоту малих коливань.

**Задача 222°.** Циліндр зі зміщеним центром мас котиться без проковзування по горизонтальній площині (рис. ??). Знайти частоту малих коливань.

**Задача 223.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли циліндр котиться по похилій площині, нахиленої до горизонталі на кут  $\alpha$ . Знайти умови існування положення рівноваги та частоту малих коливань.

**Задача 224°.** Циліндр приєднано до стержня довжини  $l$  (рис. ??). Розглянути випадки:

- 1) з'єднання шарнірне (циліндр може обертатись без тертя);
- 2) з'єднання жорстке.

Знайти частоти малих коливань для кожного з випадків.

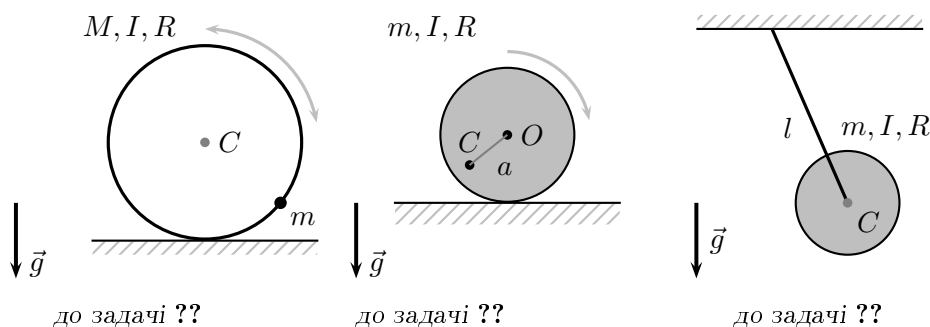


Рис. 2.14. До задач ??-??.

**Задача 225°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано маятник довжини  $l$  з частинкою маси  $m$ . (рис. ??).

**Задача 226°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано маятник довжини  $l$  з частинкою маси  $m$ . (рис. ??). Центр мас циліндра з'єднано пружиною з нерухомою точкою (пружина під час руху залишається горизонтальною).

**Задача 227°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано пружину з частинкою маси  $m$ . (рис. ??).

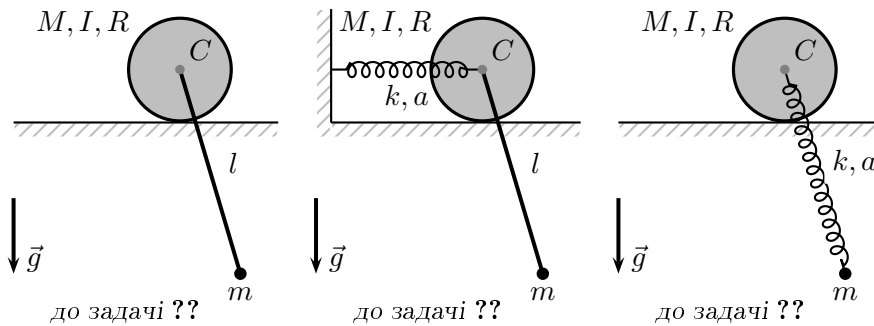


Рис. 2.15. До задач ??-??.

**Задача 228°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні клина, що ковзає по похилій площині (рис. ??).

**Задача 229°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні нерухомого циліндра. (рис. ??).

**Задача 230°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні чашки з циліндричним перерізом, що ковзає по похилій площині (рис. ??).

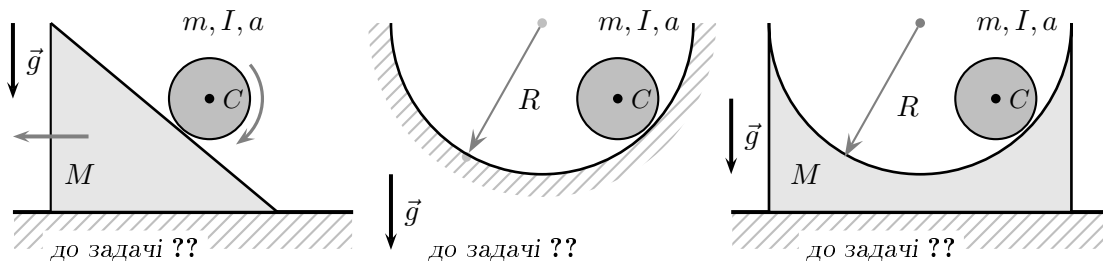


Рис. 2.16. До задач ??-??.

**Задача 231°.** Однорідний стержень ковзає по поверхні циліндра. (рис. ??).

**Задача 232°.** Розв'язати задачу ?? для випадку, коли густина стержня лінійно залежить від відстані до одного із його кінців.

**Задача 233°.** Кінець стержня приєднано до нитки. (рис. ??).

**Задача 234°.** Кінець стержня приєднано до пружини. (рис. ??).

**Задача 235.** Тонкий однорідний стержень з довжиною  $l$  та масою  $m$  зігнуто у вигляді прямого кута і підвішено на горизонтально розташованій осі. Записати функцію Лагранжа плоскопаралельного руху такого стержня. Визначити частоту лінійних коливань.

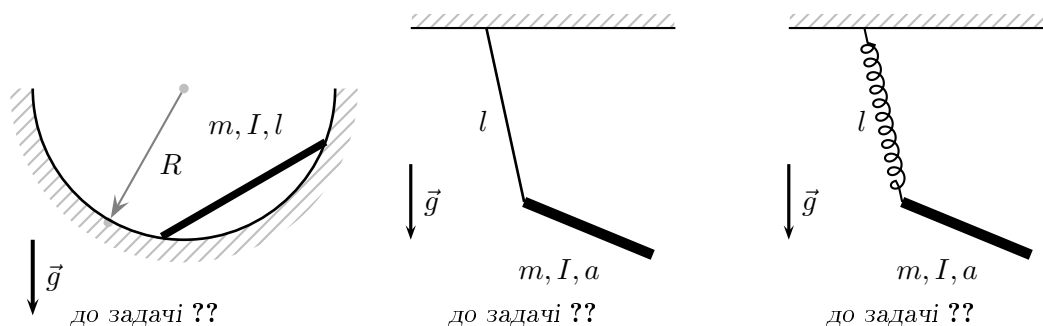


Рис. 2.17. До задач ??-??.

**Задача 236.** Однорідний стержень ковзає по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння. Рух вважати плоским. Знайти положення рівноваги та частоти малих коливань (рис. ??).

**Задача 237.** Циліндр котиться по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння. Рух вважати плоским. Знайти положення рівноваги та частоти малих коливань (рис. ??).

**Задача 238.** Циліндр котиться по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння, поверхня ковзає по горизонтальній площині. Рух вважати плоским (рис. ??).

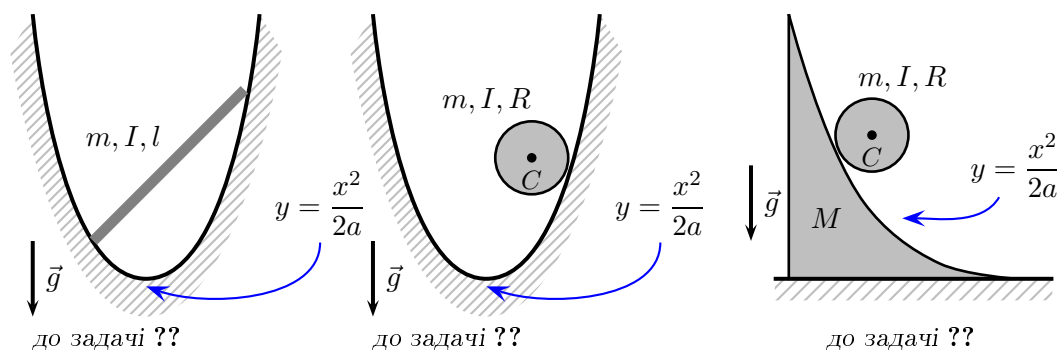


Рис. 2.18. До задач ??-??.



**Задача 239.** Циліндр котиться по внутрішній поверхні іншого циліндра по у полі сили тяжіння. Зовнішній циліндр котиться по горизонтальній площині. Рух вважати плоским (рис. ??).

**Задача 240.** Циліндр, на який намотано невагому нитку падає у полі сили тяжіння. Вільний кінець нитки закріплено у нерухомій точці. Рух вважати плоским (рис. ??).

**Задача 241.** Циліндр, на який намотано невагому нитку котиться по горизонтальній площині у полі сили тяжіння. До вільного кінця нитки приєднано частинку. Рух вважати плоским (рис. ??).

**Задача 242.** Розв'язати задачу ??, якщо зовнішній радіус циліндра  $b$ , а внутрішній, на який намотано нитку —  $a$  (“котушка”).

**Задача 243.** Розв'язати задачу ??, рух циліндра відбувається як у задачі ?? (центр мас приєднано на маятнику).

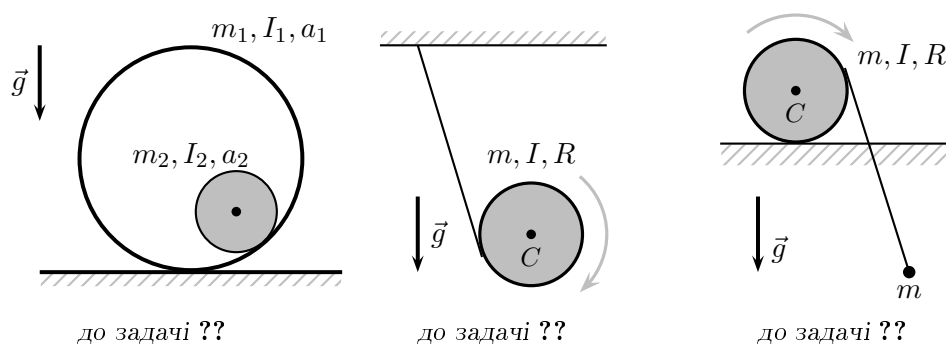


Рис. 2.19. До задач ??–??.

**Задача 244.** Однорідний конус (радіус основи  $R$ , кут розхилу  $\alpha$ ) котиться без проковзування по горизонтальній площині. Положення центра мас (на відстані  $a$  від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. ??).

**Задача 245.** Розв'язати задачу ??, якщо площина нахилена до горизонту. Дослідити малі коливання у такій системі.

**Задача 246\*.** Розв'язати задачу ??, якщо переріз конуса еліптичний. Дослідити малі коливання у такій системі.

**Задача 247.** Однорідний конус (радіус основи  $R$ , кут розхилу  $\alpha$ ) котиться без проковзування по горизонтальній площині, вістря закріплено на висоті  $l$  над площиною. Положення центра мас (на відстані  $a$  від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. ??).

**Задача 248.** Вістря однорідного конуса (радіус основи  $R$ , кут розхилу  $\alpha$ ) закріплено у нерухомій точці вертикальної площини, кочення відбувається без проковзування.

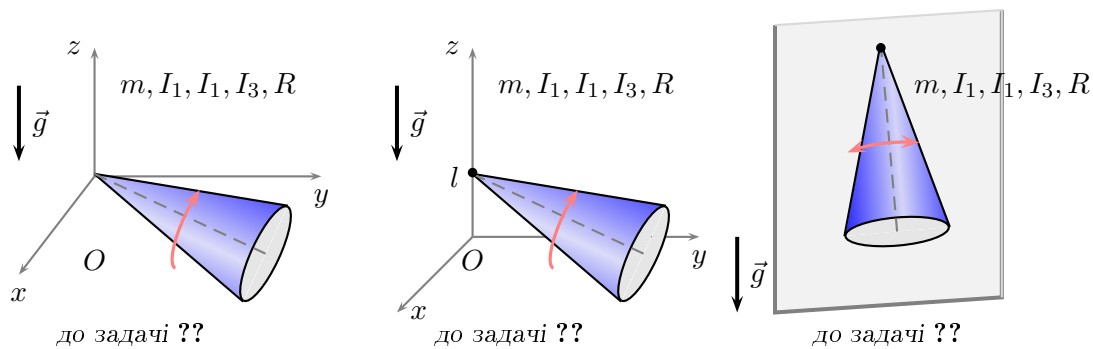


Рис. 2.20. До задач ??-??.

Положення центра мас (на відстані  $a$  від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. ??). Дослідити малі коливання у такій системі.

**Задача 249.** Знайти частоту малих коливань однорідного прямокутного паралелепіпеда з розмірами  $a \times b \times c$ , підвішеного за центр основи  $a \times b$ .

**Задача 250.** Тонкий прямий однорідний стержень довжини  $l$  і маси  $m$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі, що проходить через один із його кінців, описуючи при цьому конічну поверхню. Знайти кут  $\alpha$  відхилення стержня від вертикалі.

**Задача 251.** Однорідне кільце радіуса  $R$  і маси  $m$  одночасно обертається навколо своєї осі та навколо вертикального діаметра з постійними кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , відповідно. Знайти момент сил, які діють на кільце.

**Задача 252.** Прямий однорідний циліндр маси  $m$ , довжини  $l$  і радіуса  $r$  обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі  $Oz$ , що проходить через його центр мас. Кут між віссю симетрії циліндра та віссю  $Oz$  сталий і рівний  $\alpha$ , а відстань між підшипником і під'ятником дорівнює  $h$ . Визначити силу бічного тиску на підшипник та під'ятник.

**Задача 253.** Тонкий диск радіуса  $r$  і маси  $m$  без проковзування котиться по горизонтальній поверхні по колу радіуса  $R$ . Знайти залежність кута нахилу диска від швидкості руху його центра мас.

**Задача 254.** Проінтегрувати рівняння руху симетричної дзиги, вздовж осі симетрії якої прикладений сталий момент зовнішніх сил  $\vec{N}$  (рівнодійна всіх зовнішніх сил рівна нулю).

**Задача 255.** Записати рівняння руху важкої симетричної дзиги (випадок Лагранжа) у формі рівнянь Ейлера.

**Задача 256\*.** Дослідити рух важкої симетричної дзиги в однорідному полі сили тяжіння (випадок Лагранжа).

**Задача 257\*.** Дослідити рух "швидкого" симетричного гіроскопу із закріпленою точкою (кінетична енергія — велика порівняно з потенціальною).

**Задача 258.** Дослідити регулярну прецесію симетричного гіроскопу із закріпленою точкою та визначити умови, за яких такий рух реалізується.

**Задача 259.** Дослідити рух симетричного гіроскопу із закріпленою точкою при таких умовах, що у початковий момент часу вісь гіроскопу опускається вертикально вниз.

**Задача 260\*.** Кінці однорідного стержня ковзають по циліндричній поверхні у вертикальній площині. Вздовж стержня повзе комаха, маса якої дорівнює масі стержня, із сталою швидкістю (відносно нього). Знайти закон руху стержня (силу тяжіння не враховувати).

**Задача 261\*.** Куля радіуса  $R$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі, нахиленої під кутом  $\alpha$  до вертикалі і рухається із швидкістю  $v$ . Знайти закон зміни напрямку швидкості при її ударі об абсолютно шорстку горизонтальну поверхню.

## 2.5. Малі коливання

### Системи з кількома ступенями вільності

Для дослідження малих коливань у квадратичному наближенні можна скористатись такою послідовністю дій:

- 1) побудувати функцію Лагранжа  $L(q, \dot{q})$  (якщо вона не задана);
- 2) знайти положення рівноваги із системи рівнянь

$$\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = q_{i0} = \text{const},$$

якщо розв'язків кілька, то вибрати стійке положення, яке відповідає мінімуму  $U$ ;

- 3) ввести відносні координати  $\xi_i$  за правилом  $q_i(t) = q_{i0} + \xi_i(t)$ .

Розкласти функцію Лагранжа у ряд Тейлора до другого порядку по  $\xi$ :

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Якщо квадратичне наближення некоректне, то розв'язок даним способом побудувати не можна;

- 4) з виразу функції Лагранжа  $L(\xi, \dot{\xi})$  знайти матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{K}$ , записати характеристичне рівняння

$$\det |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0,$$

знайти частоти коливань  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ ;

- 5) знайти амплітуди коливань (з точністю до множників) з рівнянь

$$\mathbf{K} \mathbf{A}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \mathbf{M} \mathbf{A}^{(\alpha)}$$

для кожної частоти. На цьому етапі визначаються не скільки амплітуди, стільки загальні амплітудно-фазові характеристики;

- 6) записати загальний розв'язок

$$\xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}$$

і підставити початкові умови (якщо їх задано);

7) якісно проаналізувати характер коливань системи для кожної моди, взятої окремо.

**Задача 262°.** Знайти вільні коливання системи, функція Лагранжа якої

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2).$$

Як виглядає траєкторія точки в декартових координатах  $(x, y)$ ?

**Задача 263°.** Знайти нормальні коливання системи, функція Лагранжа якої:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + \alpha xy.$$

**Задача 264°.** Знайти нормальні коливання системи, функція Лагранжа якої:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2) + \beta \dot{x} \dot{y} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

**Задача 265\*.** Матеріальна точка рухається по кривій, яка обертається навколо вертикальної осі із заданою кутовою швидкістю. Потенціальна енергія точки  $U(s)$  залежить тільки від відстані, яка відкладається вздовж кривої. Знайти частоту малих коливань частинки у околі положення рівноваги, вважаючи, що воно існує.

► У задачах ??–?? дослідити малі коливання та амплітудно-фазові характеристики. Знайти нормальні координати.

**Задача 266°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рух відбувається у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 267°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами між собою та з нерухомими стінками, рух відбувається у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 268°.** Частинки з'єднані пружинами між собою та з нерухою стінкою, розглянути випадки 1)  $m_1 = m_2, k_1 = k_3$ ; 2)  $k_1 = k_2 = k_3$ . Дослідити граничні випадки  $m_1 \gg m_2, k_1 \ll k_2$  та  $k_1 \gg k_2$  (рис. ??).

**Задача 269°.** Частинки з'єднані пружинами між собою та з нерухомими стінками, розглянути випадки 1)  $m_1 = m_2, k_1 = k_3$ ; 2)  $k_1 = k_2 = k_3$ . Дослідити граничні випадки  $m_1 \gg m_2, k_1 \ll k_2$  та  $k_1 \gg k_2$  (рис. ??).

**Задача 270.** Частинка маси  $m$  та заряду  $e$  приєднана до математичного маятника довжини  $l$ , рух відбувається над заземленою площиною, що розташована на відстані  $a$  від точки кріплення маятника. Знайти частоту малих коливань такої системи.

**Задача 271.** Розв'язати задачу ??, якщо маятник замінено на пружину.

**Задача 272°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 273.** Розв'язати задачу (??) для випадку різних мас та коефіцієнтів пружності. Визначити умови, коли відбувається виродження частот. (рис. ??).

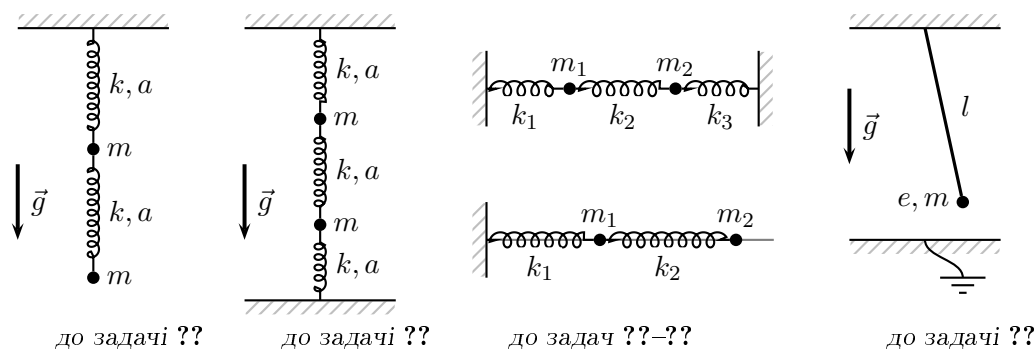


Рис. 2.21. До задач ??-??.

**Задача 274°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 275°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

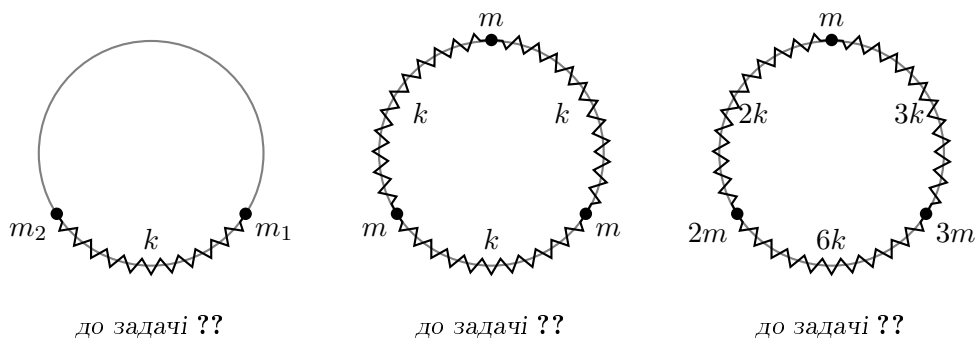


Рис. 2.22. До задач ??-??.

**Задача 276°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 277°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 278°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 279°.** Дві частинки з'єднані пружиною, рухаються по колу у полі сили тяжіння (рис. ??).

**Задача 280.** Три частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. ??).

**Задача 281.** Три однакові маятники з'єднані пружинами (рис. ??). Розглянути спочатку спрощену версію з двома маятниками.

► У задачах ??-?? (використовуючи раніше побудовану функцію Лагранжа) дослідити малі коливання та амплітудно-фазові характеристики. Знайти нормальні координати.

**Задача 282°.** Див. задачу ??.

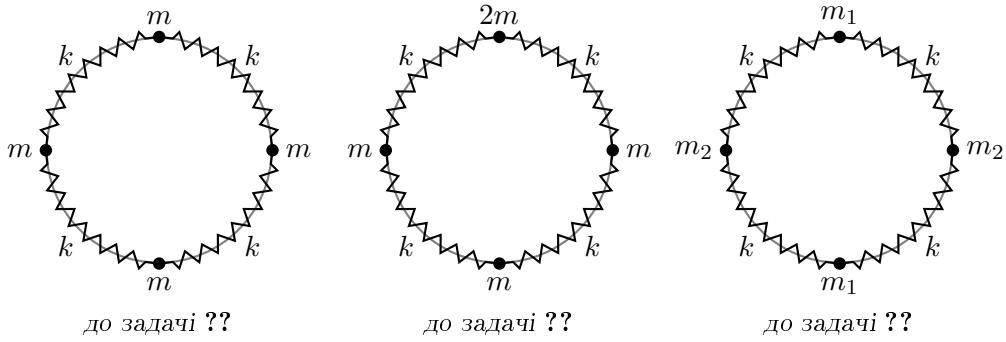


Рис. 2.23. До задач ??-??.

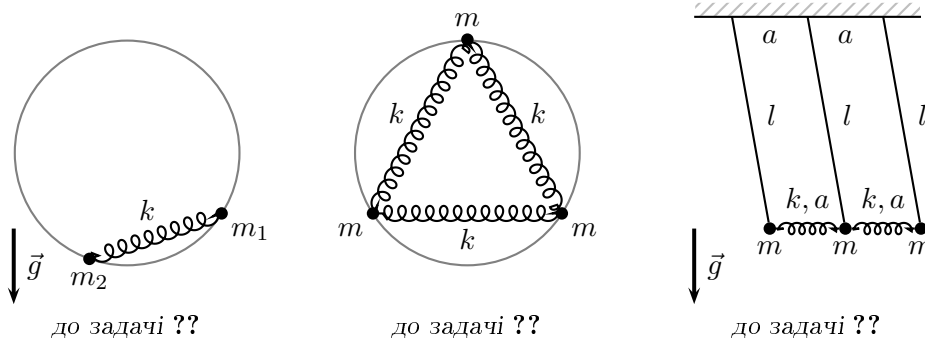


Рис. 2.24. До задач ??-??.

**Задача 283°.** Див. задачу ??.

**Задача 284°.** Див. задачу ?? (всі маси вважати однаковими).

**Задача 285°.** Див. задачу ?? (довжини маятників вважати однаковими).

**Задача 286°.** Див. задачу ??.

**Задача 287°.** Див. задачу ??.

**Задача 288°.** Див. задачу ??.

**Задача 289°.** Див. задачу ??.

**Задача 290°.** Див. задачу ??.

**Задача 291\*.** Дослідити малі коливання циліндра довільного перерізу, який котиться без проковзування у полі сили тяжіння по зовнішній поверхні іншого циліндра.

**Задача 292°.** Визначити власні частоти коливань лінійної симетричної трьохатомної молекули  $ABA$  (рис. ??). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней  $A - B$  і  $B - A$  та від величини кута  $ABA$ .

**Задача 293.** Визначити власні частоти коливань лінійної несиметричної трьохатомної молекули  $AB$  (рис. до задачі ??, маси та відстані різні). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней  $A-B$  і  $B-C$  та від величини кута  $ABC$ .

**Задача 294.** Визначити власні частоти коливань лінійної симетричної чотириатомної молекули  $ABBA$  (рис. ??). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней  $A-B$ ,  $B-B$  і  $B-A$  та від величин кутів  $ABB$  та  $BBA$ .

**Задача 295.** Визначити власні частоти коливань плоскої симетричної трьохатомної молекули  $A_2B$  (рис. ??). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней  $A-B$  і  $B-A$  та від величини кута  $ABA$ .

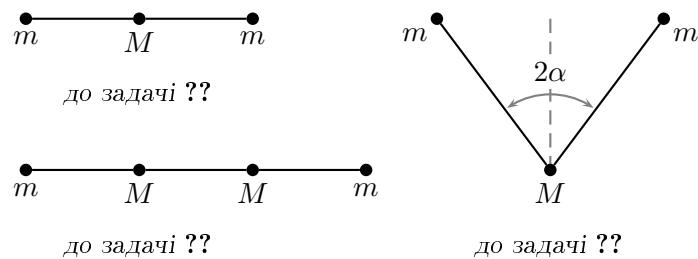


Рис. 2.25. До задач ??-??.

### Лінійні ланцюжки

**Задача 296°.** Дослідити коливання лінійного одночастинкового ланцюжка з  $N$  однакових частинок (рис. ??). Розглянути різні типи граничних умов:

- 1) ланцюжок жорстко закріплений на обох кінцях;
- 2) один з кінців ланцюжка — вільний;
- 3) кінці ланцюжка з'єднані (коло).

**Задача 297.** Розглянути граничний перехід до континуального випадку у задачі ?? (струна).

**Задача 298.** Дослідити коливання лінійного двочастинкового ланцюжка з  $2N$  частинок (рис. ??).

**Задача 299.** Дослідити коливання лінійного двочастинкового ланцюжка з  $2N$  частинок (рис. ??).

**Задача 300.** Дослідити коливання ланцюжка з  $N$  однакових маятників, з'єднаних пружинами (рис. ??). Рух відбувається у полі сили тяжіння.

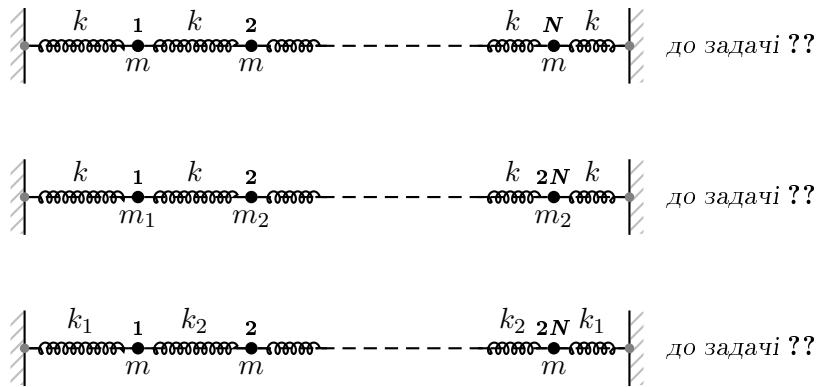


Рис. 2.26. До задач ??-??.

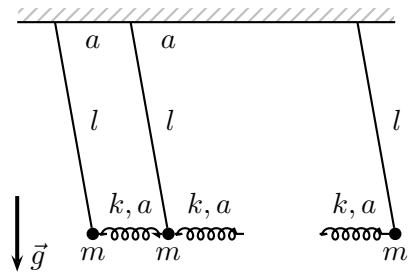


Рис. 2.27. До задачі ??.



## Нелінійні коливання

► У задачах ??-?? Методами Ляпунова-Пуанкаре та Боголюбова-Крилова дослідити коливання нелінійного осцилятора з функцією Лагранжа  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \delta U$ .

**Задача 301°.**  $\delta U = \frac{\alpha m x^3}{3}$ ,  $\alpha$  — малий параметр.

**Задача 302°.**  $\delta U = \frac{\beta m x^4}{4}$ ,  $\beta$  — малий параметр.

**Задача 303°.**  $\delta U = \frac{\alpha x \dot{x}^2}{2}$ ,  $\alpha$  — малий параметр.

**Задача 304.** Методом усереднення дослідити рух осцилятора Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \dot{x}, \quad \varepsilon > 0.$$

**Задача 305\*.** Методом усереднення дослідити рух нелінійного осцилятора із загасанням у полі зовнішньої сили

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t - \varepsilon x^3.$$

в околі резонансу  $\omega \simeq \omega_0$ . Дослідити умови, за яких існує область багатозначних амплітуд.

**Задача 306.** Дослідити резонанс на частоті  $\omega = \omega_0/2$  у задачі ??.

**Задача 307\*.** Методом Боголюбова-Крилова дослідити рух нелінійного осцилятора із загасанням у полі зовнішньої сили

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t - \varepsilon x^3.$$

в околі резонансу  $\omega \simeq \omega_0$ .

**Задача 308\*.** Методом усереднення дослідити параметричний резонанс для нелінійного осцилятора із загасанням на частоті  $\omega \simeq \omega_0$ :

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = -2\beta\dot{x} - \varepsilon x^3, \quad \omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \alpha \sin 2\omega t),$$

де  $\alpha, \beta, \varepsilon$  — малі величини.

## Розділ 3

### Механіка Гамільтона

#### 3.1. Перетворення Лежандра, рівняння Гамільтона

Перетворення Лежандра для функції  $y = f(x)$  полягає у заміні аргументу та функції за правилом

$$y = f(x), \quad \alpha := f'(x) \longrightarrow \hat{f}(\alpha) = \alpha x(\alpha) - f(x(\alpha)).$$

Функція Гамільтона зв'язана з функцією Лагранжа так:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t),$$

де у правій частині всі узагальнені швидкості  $\dot{q}_i$  слід замінити на узагальнені імпульси  $p_i$  згідно формули  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Канонічні рівняння Гамільтона мають вигляд

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

і утворюють систему  $2n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

► У задачах ??-?? Знайти перетворення Лежандра для вказаних функцій.

**Задача 309°.**  $f(x) = \frac{1}{a}x^a$ , де  $a > 1$ .

**Задача 310°.**  $f(x) = -\sqrt{1+x^2}$ .

► У задачах ??-?? Побудувати функцію Гамільтона, знайти інтеграли руху та фазову траєкторію для вказаних механічних систем.

**Задача 311°.** Вільна частинка маси  $m$  у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

**Задача 312°.** Вільна частинка маси  $m$  у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

**Задача 313.** Вільна частинка маси  $m$  у параболічних координатах.

**Задача 314°.** Частинка з масою  $m$  і зарядом  $e$  в однорідному стаціонарному електричному полі  $\vec{E}$ .

**Задача 315°.** Частинка з масою  $m$  і зарядом  $e$  в однорідному стаціонарному магнітному полі  $\vec{H}$  у декартових, циліндричних та сферичних координатах. У випадку декартових координат вибрати  $\vec{A} = Hx\vec{e}_y$ .

► У задачах ??-?? побудувати функцію Гамільтона, записати рівняння Лагранжа та Гамільтона, знайти закон руху (якщо це можливо) для систем із заданими функціями Лагранжа.

**Задача 316°.**  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g(x) \dot{x}^2 + v(x) \dot{x} - U(x).$

**Задача 317°.**  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j + v_i(x) \dot{x}^i - U(x),$  де  $i, j = \overline{1, n}.$

**Задача 318°.**  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + m \dot{\vec{r}} [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 - U(\vec{r}).$

**Задача 319°.**  $L(x, \dot{x}) = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$

**Задача 320°.**  $L(x, \dot{x}) = \frac{m \dot{x}^2}{2} (1 + \alpha x) - \frac{kx^2}{2}.$

**Задача 321°.**  $L(x, \dot{x}) = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x \dot{x}^2}{2} - \beta x^3.$

**Задача 322°.**  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}.$  Записати вираз для енергії, розглянути частинний випадок  $m = 0.$

**Задача 323°.**  $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{2} - \frac{k_1 x^2}{2} - \frac{k_2 y^2}{2} - \alpha \dot{x} \dot{y}.$

**Задача 324°.**  $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 t.$

**Задача 325°.**  $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} (1 + 2x_1) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 + x_2^2 \dot{x}_1.$

**Задача 326°.**  $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 (1 - \cos \varphi),$  ввести узагальнену координату  $\xi = 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$

**Задача 327.** Побудувати перетворення Лежандра функції Лагранжа по координатах, та записати відповідні загальні рівняння руху. Для прикладу розглянути системи з задач ?? та ??.

**Задача 328.** Побудувати перетворення Лежандра функції Лагранжа по координатах та швидкостях, та записати відповідні загальні рівняння руху. Для прикладу розглянути системи з задач ?? та ??.

**Задача 329°.** Побудувати функцію Гамільтона для задачі двох тіл з потенціалом взаємодії  $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|),$  беручи за узагальнені координати радіус-вектор  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  центру мас системи та відносну координату  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$  Розв'язати в квадратурах канонічні рівняння Гамільтона в сферичній системі координат.

► У задачах ??-?? за функцією Гамільтона побудувати (якщо це можливо) функцію Лагранжа та записати рівняння руху.

**Задача 330°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{a} \cdot \vec{p}, \quad \vec{a} = \text{const}.$

**Задача 331°.**  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + a(q)p + b(q)$ .

**Задача 332°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ .

**Задача 333°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = p_1^2 + p_1 p_2$ .

**Задача 334°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ .

**Задача 335°.**  $H(q, p) = \frac{p_1^2}{2q_2^2} + \frac{p_2^2}{2q_3^2} + \frac{p_3^2}{2q_1^2} + q_1 q_2 q_3$ .

**Задача 336°.**  $H(x, p) = -i\omega x p$ .

**Задача 337°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{ar}$ .

**Задача 338°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r}, \vec{p})}$ .

**Задача 339°.** Знайти інтеграли руху, записати і розв'язати рівняння руху для системи з функцією Гамільтона  $H(q, p) = -i\omega r p$ . Якій системі може відповідати така функція Гамільтона?

**Задача 340.** Задано функцію Гамільтона  $H(q, p)$ , яка відповідає функції Лагранжа  $L(q, \dot{q}, t)$ . Записати функцію Гамільтона, що відповідає функції Лагранжа

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

де  $F(q, t)$  — довільна функція координат та часу. Знайти рівняння Гамільтона, що відповідають функції Гамільтона  $H'(q, p, t)$  після перетворення.

► У задачах ??-?? записати рівняння Гамільтона для частинки маси  $m$ , що рухається по заданій поверхні у полі сили тяжіння (вважати  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ).

**Задача 341°.** Параболоїд  $x^2 + y^2 = az$ . Використати циліндричні координати.

**Задача 342°.** Сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$  ( $R(t)$  — задана функція часу).

**Задача 343°.** Поверхня конуса з кутом розхилу  $\alpha$  ( $z$  — вісь симетрії). Використати сферичні координати.

**Задача 344.** Задана механічна система з гамільтоніаном

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 x_1^4 + p_2^2 x_2^2) - \alpha x_1.$$

Знайти залежність  $x_1(x_2)$ , використовуючи інтеграл енергії.

► У задачах ??-?? Розв'язати рівняння Гамільтона для вказаних механічних систем.

**Задача 345.**  $H(x, p) = p^2 + \frac{1}{x^2}$ , де  $x(0) = 1$ ,  $p(0) = 0$ .

**Задача 346.**  $H(x, p) = \frac{1}{4}p^2x^2 + \frac{1}{x^2}$ , де  $x(0) = 1$ ,  $p(0) = 0$ .

**Задача 347.**  $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2} + x_1$ , де  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,  $p_1(0) = 0$ ,  $p_2(0) = 1$ .

**Задача 348.**  $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2 - p_1^2 - p_2^2}} - x_1$ , де  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $p_1(0) = 1$ ,  $p_2(0) = 0$ .

**Задача 349.** Задана механічна система з функцією Гамільтона  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})}$ , де  $n(\vec{r}) = a|\vec{r}|$ . У сферичних координатах, використовуючи інтеграл енергії, знайти рівняння траєкторії (залежності  $r(\varphi)$ ,  $r(\theta)$ ) системи та залежності координат від часу.

**Задача 350.** Знайти закон руху системи з функцією Гамільтона

$$H(x, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0 x^2) + \frac{\alpha}{4}(p^2 + \omega_0 x^2)^2.$$

**Задача 351.** Знайти закон руху частинки з масою  $m$  та зарядом  $e$  в однорідному стаціонарному магнітному полі  $\vec{H}$  методом Гамільтона.

**Задача 352.** Побудувати функцію та Гамільтона для зарядженого гармонічного осцилятора в однорідному стаціонарному магнітному полі  $\vec{H}$  та знайти закон руху.

**Задача 353.** Побудувати функцію Гамільтона для дзиги з нерухомою точкою опори.

### 3.2. Дужки Пуассона

Означення дужок Пуассона для функцій динамічних змінних  $A(q, p, t)$ ,  $B(q, p, t)$ :

$$[A, B] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right).$$

Необхідна і достатня умова того, що функція  $f(p, q, t)$ , є інтегралом руху механічної системи запишеться так

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0.$$

**Задача 354°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1) [x_i, L_j]; \quad 2) [p_i, L_j]; \quad 3) [L_i, L_j].$$

**Задача 355°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1) [(\vec{a} \cdot \vec{r}), (\vec{b} \cdot \vec{p})]; \quad 2) [(\vec{a} \cdot \vec{r}), (\vec{b} \cdot \vec{L})]; \quad 3) [(\vec{a} \cdot \vec{p}), (\vec{b} \cdot \vec{L})]; \quad 4) [(\vec{a} \cdot \vec{L}), (\vec{b} \cdot \vec{L})],$$

де  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  — сталі вектори.

**Задача 356°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1) [\vec{L}, (\vec{r} \cdot \vec{p})]; \quad 2) [\vec{r}, (\vec{r} \cdot \vec{p})]; \quad 3) [\vec{p}, (\vec{r} \cdot \vec{p})]; \quad 4) [r^n, \vec{p}]; \quad 5) [(\vec{a} \cdot \vec{r})^n, \vec{p}].$$

**Задача 357.** Знайти: 1)  $[\vec{L}, f(\vec{a} \cdot \vec{r})]$ ; 2)  $[\vec{L}, f(\vec{a} \cdot \vec{p})]$ ; 3)  $[\vec{L}, \vec{a} \cdot (\vec{r} \times \vec{L})]$ .

**Задача 358.** Показати, що  $[\varphi, L_z] = 0$ , де  $\varphi$  — довільна скалярна функція координат та імпульсу частинки.

**Задача 359.** Показати, що  $[\vec{f}, L_z] = \vec{e}_z \times \vec{f}$ , де  $\vec{f}$  — довільна векторна функція координат та імпульсу частинки,  $\vec{e}_z$  — орт у напрямку осі  $z$ .

**Задача 360°.** Задано двовимірний осцилятор

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Означимо величини:

$$S_1 = \frac{1}{2m}(p_x^2 - p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - y^2), \quad S_2 = \frac{1}{m} p_x p_y + m\omega^2 xy, \quad S_3 = \omega(xp_y - yp_x).$$

Показати, що

$$[H, S_i] = 0, \quad H^2 = |\vec{S}|^2, \quad [S_i, S_j] = 2\omega \varepsilon_{ijk} S_k.$$

**Задача 361.** Обчислити дужки Пуассона  $[\vec{L}, \Lambda_{ij}]$ ,  $[\Lambda_{ij}, \Lambda_{kl}]$ , де  $\Lambda_{ij} = x_i x_j + p_i p_j$ .

**Задача 362°.** Для гармонічного осцилятора з масою  $m$  та частотою  $\omega$  розглянемо змінні

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^* = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

обчислити дужки Пуассона

$$[a, a^*], \quad [a, H], \quad [a^*, H].$$

Записати рівняння руху для цих змінних та розв'язати їх.

**Задача 363.** Обчислити дужки Пуассона  $[v_i, v_j]$  (швидкостей) для частинки в магнітному полі.

**Задача 364.** Обчислити дужки Пуассона  $[H, p_x]$ ,  $[H, \vec{r}]$ ,  $[H, \vec{L}]$  для випадків:

$$1) H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad 2) H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r).$$

**Задача 365\*.** Для частинки в полі  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  існує інтеграл руху  $\vec{A} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{L}] - \frac{\alpha \vec{r}}{r}$  (вектор Рунге-Ленца). Обчислити дужки Пуассона:

$$1) [A_i, A_j]; \quad 2) [A_i, L_j]; \quad 3) [x_i, A_j]; \quad 4) [p_i, A_j]; \quad 5) [H, \vec{A}].$$

**Задача 366.** Використовуючи дужки Пуассона, показати, що для руху частинки у центрально-симетричному полі  $U(r)$  зберігається її момент імпульсу.

**Задача 367.** Перевірити, чи є функції  $\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2$ ,  $\varphi_2 = p_2^2 + q_1^2$  та  $\varphi_3 = [\varphi_1, \varphi_2]$  першими незалежними інтегралами механічної системи з функцією Гамільтона  $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$ .

**Задача 368.** Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  задано значення функції механічного стану  $F(q, p)$  зі значенням  $F_0$ . Показати, що для незалежної від часу функції Гамільтона має місце розклад

$$F = F_0 + t[F_0, H] + \frac{t^2}{2!} [[F_0, H], H] + \frac{t^3}{3!} [[[F_0, H], H], H] + \dots$$

Скористатись розкладом для побудови розв'язку задачі 1) про одновимірний рух частинки у полі сталої сили. 2) одновимірного осцилятора.

### 3.3. Канонічні перетворення

У незалежних змінних  $q_i$  і  $q'_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) диференціал твірної функції  $F(q_i, q'_i, t)$  канонічного перетворення має вигляд

$$dF(q, q', t) = \sum_{i=1}^f p_i dq_i - \sum_{i=1}^n p'_i dq'_i + (H'(q', p', t) - H(p, q, t)) dt,$$

звідки маємо

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F}{\partial q'_i}, \quad H'(q', p', t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Для твірних функцій інших типів вирази аналогічні їх можна записати перестановками пар спряжених змінних ( $q_i$  та  $p_i$ ) з одночасними змінами знаків правої частини.

**Задача 369°.** Знайти канонічні перетворення, які описуються твірними функціями:

$$\begin{aligned} 1) F(q, q') &= q q'; & 2) F(p, p') &= p p'; \\ 3) F(q, p') &= q p'; & 4) F(q', p) &= -q' p; \\ 5) F(q, p') &= \sum_i \varphi_i(q) p'_i. \end{aligned}$$

**Задача 370°.** Знайти канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$\begin{aligned} 1) F(x, p') &= \frac{1}{2} x^2 p'; & 2) F(x, p') &= x \sqrt{2p'}; \\ 3) F(x, p') &= x \ln p'; & 4) F(x, p') &= p' \ln x. \end{aligned}$$

**Задача 371°.** Знайти умову, за якої лінійне перетворення  $q' = aq + bp$ ,  $p' = cq + dp$  змінних  $p$  і  $q$  буде канонічним, якщо  $a, b, c, d$  — сталі.

**Задача 372°.** Знайти канонічне перетворення, яке задано твірною функцією  $F(q, p', t) = qp' + (bq - ap')t$ , де  $a, b$  — сталі. Записати рівняння Гамільтона у нових змінних.

**Задача 373°.** Знайти новий гамільтоніан вільної частинки та канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1) F(\vec{r}, \vec{r}', t) = \frac{m}{2t} (\vec{r} - \vec{r}')^2; \quad 2) F(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \frac{\vec{p}'^2}{2m} t.$$

Розв'язати задачу в нових змінних. Використовуючи перетворення Лежандра, знайти версію першого перетворення у змінних  $(\vec{r}, \vec{p}', t)$ .

**Задача 374°.** Знайти новий гамільтоніан (на прикладі вільної частинки) та канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1) F(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \vec{a} \cdot \vec{p}' t + m \vec{r} \cdot \vec{a}; \quad 2) F(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \varphi(\vec{r}, t).$$

**Задача 375°.** Частинка маси  $m$  рухається в однорідному полі сили тяжіння. Знайти її новий гамільтоніан і канонічне перетворення породжене твірною функцією

$$F(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' + m \vec{g} \cdot \vec{r} t.$$

**Задача 376°.** Знайти канонічні перетворення та новий гамільтоніан гармонічного осцилятора з масою  $m$  і частотою  $\omega$  для таких твірних функцій:

$$1) F(x, p') = \frac{1}{2} \left[ ip'^2 - im\omega x^2 + 2\sqrt{2m\omega} xp' \right];$$

$$2) F(x, x') = -\frac{1}{2} m\omega x^2 \operatorname{tg} x';$$

$$3) F(x, x', t) = -\frac{1}{2} m\omega x^2 \operatorname{tg}(x' + \omega t);$$

$$4) F(x, x') = \alpha x^2 \operatorname{ctg} x'$$

у випадку 4 підібрати зручне значення  $\alpha$ .

**Задача 377.** Знайти канонічне перетворення, яке задається твірною функцією  $F(x, x', t) = \frac{1}{2} m\omega(t)x^2 \operatorname{ctg} x'$ . Записати в змінних  $q'$  і  $p'$  рівняння руху гармонічного осцилятора з частотою  $\omega(t)$ .

**Задача 378.** Знайти канонічне перетворення, яке задається твірною функцією

$$F(x, x', t) = \frac{1}{2} m\omega \left( x - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right)^2 \operatorname{ctg} x'.$$

У змінних  $x'$  і  $p'$  записати рівняння руху гармонічного осцилятора під дією зовнішньої сили  $F(t)$ .

**Задача 379.** Вияснити зміст канонічних перетворень, які задаються твірними функціями:

$$1) V(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' + \delta \vec{a} \cdot \vec{p}';$$

$$2) V(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' + \delta \vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}');$$

$$3) V(q, p', t) = qp' + \delta \tau H(q, p', t);$$

$$4) V(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' + \delta \alpha (\vec{r}^2 + \vec{p}'^2),$$

де  $\vec{r}$  — радіус-вектор,  $\delta \vec{a}$ ,  $\delta \vec{\varphi}$ ,  $\delta \tau$ ,  $\delta \alpha$  — нескінченно малі параметри.



**Задача 380.** Знайти канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1) V(\vec{r}, \vec{p}') = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}'}{p'^2}; \quad 2) V(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' + \varepsilon(\vec{r}^2 + \vec{p}'^2).$$

**Задача 381.** Знайти твірну функцію виду  $\bar{F}(p, x')$ , яка приводить до такого самого канонічного перетворення, що і функція  $F(x, p') = x^2 \exp(p')$ .

**Задача 382.** Показати, що для системи з однією степеню вільності поворот у фазовому просторі  $(q, p)$  є канонічним перетворенням.

**Задача 383.** У двовимірному випадку знайти канонічне перетворення, що задається твірною функцією  $V(x', y', p_x, p_y) = -x'p_y \sin y' - x'p_x \cos y'$ .

**Задача 384.** Показати, що канонічне перетворення, яке задається твірною функцією  $V(x, y, p'_x, p'_y) = xp'_x + yp'_y + \varepsilon(xy + p'_x p'_y)$ , де  $\varepsilon \rightarrow 0$ , являє собою поворот у фазовому просторі.

**Задача 385°.** Показати, що перетворення  $p = \alpha\sqrt{2p'} \cos q'$ ,  $q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2p'} \sin q'$  є канонічним та знайти його твірну функцію.

**Задача 386°.** Показати, що перетворення  $q' = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$ ,  $p' = q \operatorname{ctg} p$  є канонічним та знайти його твірну функцію.

**Задача 387.** Знайти умови, за яких канонічне перетворення з твірною функцією

$$F(x, x', t) = \frac{1}{2}(ax^2 - 2bxx' + cx'^2)$$

зберігає вигляд рівняння  $\ddot{x} + \omega(t)x = 0$ , де коефіцієнти  $a, b, c$  — явно залежать від часу.

**Задача 388\*.** У твірній функції  $F = xp' + ax^3p' + bxp'^3$  канонічного перетворення стали  $a$  і  $b$  підібрати так, щоб малі коливання ангармонічного осцилятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$$

у нових змінних  $x'$  та  $p'$  зводилися до гармонічних. Доданками порядку  $\alpha\omega^2 x'^2$  у новій функції Гамільтона знехтувати.

### 3.4. Рівняння Гамільтона-Якобі

Рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Алгоритм розв'язку задачі за допомогою рівняння Гамільтона-Якобі:

- 1) знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі  $S = S(q, \alpha, t)$ ;

2) ототожнити нові координати зі сталими інтегрування,  $q'_i = \alpha_i$ . Виразити старі координати з рівнянь канонічного перетворення:

$$\beta_i = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \Rightarrow q_i = q_i(\alpha, \beta, t),$$

де  $p'_i = \beta_i$  — сталі величини, які позначають нові імпульси;

3) знайти старі імпульси підстановкою  $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$  до рівняння канонічного перетворення:

$$p_i = \left. \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \right|_{q=q(\alpha, \beta, t)} \Rightarrow p_i = p_i(\alpha, \beta, t);$$

4) у формулах  $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$  та  $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$ , які задають обернене канонічне перетворення до старих змінних (і розв'язок задачі), визначити фізичний зміст сталих  $\alpha$  та  $\beta$ , або виразити їх через початкові умови.

► *Методом рівняння Гамільтона-Якобі розв'язати задачі ??-??.*

**Задача 389°.** Знайти траєкторію та закон руху вільної частинки.

**Задача 390°.** Знайти траєкторію та закон руху частинки маси  $m$  у полі сталої сили.

**Задача 391°.** Знайти закон руху для частинки маси  $m$ , що рухається по гладкій похилій площині з кутом нахилу  $\alpha$ .

**Задача 392°.** Знайти закон руху в квадратурах для математичного маятника.

**Задача 393°.**  $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$  (одновимірний осцилятор).

**Задача 394°.**  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k_x x^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2} + \frac{k_z z^2}{2}$  (тривимірний осцилятор).

**Задача 395°.**  $H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 - y^2)$ .

**Задача 396.** Знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі та закон руху в квадратурах частинки з масою  $m$  та зарядом  $e$  в однорідному стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}$  у:

- 1) прямокутній декартовій системі координат;
- 2) циліндричній системі координат.

*Вказівка:* Векторний потенціал магнітного поля вибрати у такому вигляді: 1)  $\vec{A} = -\vec{e}_x y B$ ;

2)  $\vec{A} = \frac{1}{2} B r \vec{e}_\varphi$ .

**Задача 397.** Знайти траєкторію та закон руху частинки маси  $m$  у кулонівському потенціалі  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ . Розглянути випадки  $\alpha > 0$  та  $\alpha < 0$ .

**Задача 398.** Знайти в квадратурах закон руху частинки маси  $m$  у полі диполя  $U(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ , де  $\vec{p}$  — сталий вектор.

**Задача 399.** У циліндричній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси  $m$  у потенціалі  $U(\vec{r}) = \frac{\alpha \sin \varphi}{r^2}$  при  $\alpha > 0$ .

**Задача 400\*.** У сферичній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси  $m$  у потенціалі:

$$1) U(\vec{r}) = \frac{\alpha \cos^2 \theta}{r^2} \text{ при } \alpha > 0; \quad 2) U(\vec{r}) = \alpha r^2 + \frac{\beta \cos \theta}{r^2} \text{ при } \alpha, \beta > 0.$$

**Задача 401\*.** Розглянути рух частинки маси  $m$  у потенціалі  $U(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ , де  $\alpha > 0$ ,  $\vec{p}$  — сталий вектор.

**Задача 402.** При  $L_z = 0$  у сферичній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси  $m$  у потенціалі:

$$1) U(\vec{r}) = \frac{\alpha \cos \theta}{r^2} - \frac{\beta}{r}; \quad 2) U(\vec{r}) = \frac{\alpha \cos \theta}{r^2} + \beta r^2$$

при  $\alpha, \beta > 0$ .

**Задача 403\*.** У сферичній системі координат знайти закон руху механічної системи з функцією Гамільтона:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} + \frac{k\vec{r}^2}{2}$$

(релятивістський рух у гармонічному потенціалі).

**Задача 404\*.** У сферичній системі координат знайти закон руху механічної системи з функцією Гамільтона:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} - \frac{\alpha}{r}$$

(релятивістський рух у потенціалі Кулона).

**Задача 405.** Знайти закон руху у квадратурах для системи з функцією Лагранжа

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \alpha x^2} + \beta \text{ при } \alpha, \beta > 0.$$

**Задача 406.** Розглянути задачу про рух дзиги з нерухомою точкою.

## РОЗДІЛ 4

### Механіка суцільного середовища

#### 4.1. Теорія пружності

Тензори деформації та швидкості деформації мають вигляд

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1, f},$$

де  $\vec{u} = \{u_i\}$ ,  $\vec{v} = \{v_i\}$  — відповідно, векторні поля зміщення та швидкостей.

Абсолютно пружне ізотропне тверде тіло характеризується лише двома пружними сталими  $\lambda$  та  $\mu$  і закон Гука для нього має вигляд

$$p_{ij} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij},$$

а рівняння руху такого тіла без врахування сил внутрішнього терт запишеться так

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho \vec{f} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u},$$

де  $\rho$  — поле густини,  $\vec{f}$  — масова густина зовнішньої об'ємної сили.

Граничні умови для задач теорії пружності мають вигляд

$$\vec{u}|_I = \vec{u}|_{II}, \quad (p_{ij} n_j)|_I = (p_{ij} n_j)|_{II},$$

де  $\vec{n}$  — одиничний вектор нормалі до поверхні розділу двох середовищ.

**Задача 407°.** Записати тензори деформації і швидкості деформації в циліндричній та сферичній системах координат. Розглянути випадок малих деформацій.

**Задача 408°.** Записати тензори деформації і швидкості деформації в довільній ортогональній криволінійній системі координат. Розглянути випадок малих деформацій.

**Задача 409°.** Виразити тензор деформацій  $u_{ij}$  через тензор механічних напруг  $\lambda_{ijkl}$  для ізотропного суцільного середовища.

**Задача 410°.** Знайти деформації однорідного прямого стержня висоти  $h$  і прямокутного перерізу  $a \times b$ , нижня основа якого закріплена, а до верхньої прикладена рівномірно розподілена по перерізу стержня статична сила  $F$ . Розглянути випадки:

- сила напрямлена вздовж нормалі до верхньої основи;
- сила напрямлена паралельно одному із ребер верхньої основи;
- орієнтація сили — довільна.

**Задача 411°.** Знайти деформацію однорідного циліндра радіуса  $R$ , що рівномірно обертається навколо своєї осі із сталою кутковою швидкістю  $\omega$ .

**Задача 412°.** Знайти деформацію однорідної кулі радіуса  $R$  під дією власного гравітаційного поля.

**Задача 413.** Знайти деформацію однорідного сферичного шару з внутрішнім радіусом  $R_1$  і зовнішнім —  $R_2$ , якщо з середини на нього діє тиск  $p_1$ , а з зовні —  $p_2$ .

**Задача 414°.** Знайти деформацію нескінченного однорідного циліндричного шару з внутрішнім радіусом  $R_1$  і зовнішнім —  $R_2$ , якщо з середини на нього діє тиск  $p$ , а з зовні — тиск відсутній.

**Задача 415.** Знайти деформації кручення однорідного стержня циліндричної форми висотою  $l$  і радіуса  $R$ , нижня основа якого закріплена, а верхня повернута на кут  $\varphi_0$  відносно ненапруженого стану.

**Задача 416°.** Знайти частоти власних поздовжніх коливань безмежної однорідної пластинки товщиною  $h$ .

**Задача 417°.** Знайти частоти власних радіальних коливань ізотропної пружної кулі радіуса  $R$ , що знаходиться у вакуумі.

**Задача 418°.** Знайти частоти власних радіальних коливань сферичної порожнини радіуса  $R$  у необмеженому однорідному ізотропному суцільному середовищі.

**Задача 419°.** Знайти дисперсійне рівняння для розповсюдження пружних хвиль в ізотропному суцільному середовищі. Визначити фазові швидкості поширення хвиль.

**Задача 420.** Записати дисперсійне рівняння поширення пружних хвиль у монокристалі кубічної симетрії. Знайти фазові швидкості пружних хвиль у двох випадках: хвилі поширюються паралельно і перпендикулярно боковим поверхням куба.

**Задача 421.** Знайти закон відбиття плоскої поздовжньої пружної хвилі, що падає під кутом  $\alpha$  до межі розділу ізотропного суцільного середовища з вакуумом. Визначити коефіцієнт відбиття.

**Задача 422.** Розглянути попередню задачу при умові, що падаюча хвиля — поперечна, а напрямок коливань у ній лежить у площині падіння.

## 4.2. Гідродинаміка

Для рідин та газів тензор в'язких напруг має вигляд

$$\sigma_{ij} = (\xi - \eta) \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\eta v_{ij}, \quad i, j = \overline{1, f}$$

і, відповідно, повний тензор механічних напруг можна записати так

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + (\xi - \eta) \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\eta v_{ij},$$

де  $\vec{v}$  — поле швидкостей,  $p$  — поле тиску,  $\eta$ ,  $\xi$  — коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості, відповідно.

Повна система рівнянь руху в'язкої рідини або газу має вигляд:

- рівняння Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \xi \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v},$$

- рівняння неперервності

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

- рівняння балансу енергії

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{div}(\kappa \vec{\nabla} T) - p \operatorname{div} \vec{v} + \sigma_{ij} v_{ij}.$$

де  $\rho$  — поле густини,  $u$  — внутрішня термодинамічна енергія одиниці маси рідини,  $\kappa$  — коефіцієнт теплопровідності.

Умова нестискуваності рідини має вигляд

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

**Задача 423°.** Записати рівняння Нав'є-Стокса в циліндричній та сферичній системах координат.

**Задача 424°.** В'язка нестислива рідина під дією перепаду тиску  $\Delta p$  на довжині  $l$  протікає між двома нескінченними паралельними площинами, розташованими на відстані  $d$  одна від одної. Визначити поле швидкостей і тиску в просторі між площинами. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз. Знайти розподіл температури в рідині та потік тепла на стінках за умов:

- 1) на нижній і верхній площині за допомогою термостата підтримується стала температура  $T_0$ ;
- 2) нижня площина теплоізолювана, а температура верхньої підтримується сталою і рівною  $T_0$ .

**Задача 425°.** В'язка нестислива рідина знаходиться між двома нескінченними паралельними площинами, одна з яких рухається зі сталою швидкістю  $\vec{v}_0$  паралельно іншій, що перебуває на відстані  $l$  від неї. Визначити поле швидкостей і тиску в просторі між площинами. Знайти масу рідини, яка протікає за одиницю часу через поперечний переріз.

**Задача 426°.** В'язка нестислива рідина під дією перепаду тиску  $\Delta p$  на довжині  $l$  протікає по прямій трубці: круглого перерізу радіуса  $R$ . Знайти поле швидкостей та тиску в трубці. Знайти масу рідини, яка протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби. Визначити розподіл температури в рідині, якщо температура стінки труби підтримується сталою і рівною  $T_0$ .

**Задача 427.** Знайти розв'язок задачі ?? для випадку труби еліптичного перерізу з півосями  $a$  та  $b$ .

**Задача 428°.** В'язка нестислива рідина під дією перепаду тиску  $\Delta p$  на довжині  $l$  протікає по прямій трубці кільцевого перерізу, відповідно, з внутрішнім та зовнішнім радіусами  $R_1$  та  $R_2$ . Визначити поле швидкостей та тиску в рідині. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби.

**Задача 429°.** В'язка нестискувана рідина знаходиться між двома коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1$  та  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Визначити поле швидкостей та тиску в рідині,

якщо один із циліндрів рухається із сталою швидкістю  $\vec{v}_0$  вздовж своєї осі. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз такої труби.

**Задача 430.** В'язка нестискувана рідина знаходиться між двома коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1$  та  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Визначити поле швидкостей та тиску в таких випадках:

- 1) зовнішній циліндр обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1$ ;
- 2) внутрішній циліндр обертається з кутовою швидкістю  $\omega_2$ ;
- 3) обидва циліндри обертаються з кутовими швидкостями  $\omega_1$  та  $\omega_2$ .

**Задача 431.** Для умов попередньої задачі знайти поле температур у рідині, якщо внутрішній циліндр теплоізолюваний, а зовнішній підтримується при сталій температурі  $T_0$ .

**Задача 432°.** Шар рідини товщиною  $h$  обмежений зверху вільною поверхнею, а знизу — нерухомою площиною, яка нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту. Визначити поле швидкостей та тиску при русі рідини в однорідному полі сили тяжіння.

## Література

- [1] Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. *Класична механіка*. К.: ВПЦ “Київський Університет”. 2008 — 480 с. Т. 1. Механіка. — М.: Наука, 1988. — 215 с.
- [2] Федорченко А. Ф. *Теоретична фізика: В 2 т. Т. 1. Класична механіка і електродинаміка*. — К.: Вища школа, 1992. — 533 с.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 1. Механика*. — М.: Наука, 1988. — 215 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 2. Теория поля*. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика*. — М.: Наука, 1988. — 733 с.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 7. Теория упругости*. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
- [7] Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. Ф. *Сборник задач по теоретической физике*. — К.: Вища школа, 1984. — 319 с.
- [8] Коткин Г. Л., Сербо В. Г. *Сборник задач по классической механике*. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
- [9] Голдстейн Г. *Классическая механика*. — М.: Мир, 1975. — 415 с.
- [10] Д. тер Хаар *Основы гамильтоновой механики*. — М.: Наука, 1974. — 223 с.
- [11] И.И.Ольховский, *Курс теоретической механики для физиков*, М.: Наука, 1970.
- [12] И.И.Ольховский, Ю.Г.Павленко, Л.С.Кузьменков, *Задачи по теоретической механике для физиков*, М.: Изд-во МГУ, 1977.
- [13] Ю.Г.Павленко, *Лекции по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [14] Ю.Г.Павленко, *Задачи по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1988.