

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Методичні вказівки
до проведення семінарських занять
з математичного аналізу

для студентів фізичного факультету

Київ 2015

Упорядники:

Гнатовський Володимир Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, асистент,
Ледней Михайло Федорович, доктор. фіз.-мат. наук, доцент,
Макарець Микола Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Романенко Олександр Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти:

Доктор фіз. -мат. наук, проф. *Шевчук І.О.*
Доктор фіз. -мат. наук, проф. *Городній М.Ф.*

Передмова

Цей навчально-методичний посібник призначено для студентів фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що вивчають математичний аналіз у загальному обсязі 576 годин (лекцій 106 годин, семінарських занять 176 годин, самостійної роботи 294 годин, іспитів — 3), та викладачів, що проводять семінарські заняття з математичного аналізу на фізичному факультеті протягом 3-х семестрів (72 години, 68 годин, 36 годин відповідно).

Підбір тем занять та завдань, що виносяться на кожне практичне заняття, є результатом 30-річної роботи викладачів фізичного факультету, які проводили та проводять у даний час семінарські заняття з курсу математичного аналізу, і повністю відповідає діючому навчальному плану фізичного факультету. Їх спрямованість і кількісні пропорції відповідають вимогам до знань, вмінь та навичок студентів-фізиків з математичного аналізу, інших курсів вищої математики та курсів теоретичної фізики, зокрема. Саме тому основна увага приділяється розвитку вмінь та навичок виконувати як прямі, так і особливо обернені операції. Те саме стосується і завдань для самостійної роботи.

Кількість завдань, що винесено на кожне семінарське заняття, достатня як для роботи зі студентською групою будь-якого рівня, так і для індивідуального підходу до різних студентів. Звичайно, в добре підготовлених студентських групах число виконаних завдань може бути більшим, а їх складність — вищою. Те саме відноситься і до індивідуальної роботи з добре підготовленими студентами. Завдання кожної контрольної роботи слугують прикладами для підготовки студентів до цієї роботи, а реальні завдання готуються окремо. Кількість завдань для самостійної роботи може змінюватись залежно від рівня студентської групи. Разом із завданнями для самостійної роботи студентам рекомендовано попередньо ознайомитись з теоретичним матеріалом, необхідним для наступного семінарського заняття.

Переважна більшість завдань указана за посібником [1].

I семестр

ТЕМА 1. ПРОПЕДЕВТИКА (12 годин)

Заняття 1

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З МАТЕРІАЛУ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ.

Заняття 2

ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Рекомендовано розглянути всі елементарні функції, в тому числі й обернені. До заняття рекомендується посібник [8].

1. Область існування. Множина значень: 151, 153, 156, 159, 166, 168, 175, 176.
2. Обернена функція: 225, 227, 228, 229, arch x .
3. Складна функція: 206, 208, 212, 213.1.
4. Парна-непарна функція. Періодична функція: 231 (а, г), 233 (а, б, г), 235.1.
5. Гіперболічні функції, їх графіки та властивості. Тотожності для гіперболічних функцій.

Домашнє завдання: 152, 155, 157, 160, 164, 165.2, 165.3, 167, 169, 207, 209, 211, 213, 224, 226, 230, 231 (б, в, д), 232, 233 (в, д, е, ж, з), тотожності для гіперболічних функцій (аналоги відомих тригонометричних).

Заняття 3

ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ

Також рекомендовано розглянути всі елементарні функції, в тому числі й обернені. До заняття рекомендується посібник [8].

1. Графіки елементарних функцій у декартових координатах: 253, 256, 267, 298, 299, 304, 310, 315, 318, 327 (а, в), 331, 338, 341.
2. Графіки елементарних функцій у полярних координатах: 371 (а, б, д, ж).

Домашнє завдання: 254, 259, 272, 291, 293, 305, 307, 316, 319, 327 (б, г), 334, 339, 344, 371 (в, е, з, и).

Заняття 4

ПОХІДНА ВІД ФУНКЦІЇ

До заняття рекомендовано посібники [8], [9].

1. Похідна від явної функції. Таблиця похідних: 835, 838, 843, 851, 853, 862, 913, 920.
2. Основні правила обчислення похідної: 846, 849, 854, 858.
3. Похідна від складної функції: 860, 866, 876, 880, 914, 922, 925, 929.
4. Диференціал функції: 1085, 1087, 1090 (а, д), 1099.

Домашнє завдання: 841, 844, 845, 847, 852, 857, 861, 865, 871, 887, 901, 915, 917, 925, 928, 1086, 1088, 1090 (б, в, ж), 1100, 1101.

Заняття 5

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

До заняття рекомендовано посібники [8], [9].

1. Таблиця інтегралів: 1628, 1633, 1644, 1647.
2. Основні методи інтегрування:
 - а) введення нового аргументу: 1655, 1658, 1661, 1774, 1680, 1683, 1690, 1696;
 - б) розкладу: 1721, 1733, 1735, 1741, 1744, 1747, 1754;
 - в) інтегрування частинами: 1791, 1795, 1798, 1803, 1811, 1828.
3. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца: 2206, 2208, 2211, 2239, 2244, 2268, 2278.

Домашнє завдання: 1629, 1631, 1656, 1662, 1665, 1676, 1689, 1681, 1734, 1737, 1742, 1743, 1748, 1750, 1761, 1796, 1800, 1829, 2207, 2209, 2240, 2242, 2273, 2277.

Заняття 6

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА

До заняття рекомендовано посібник [8].

1. Комплексні числа, алгебраїчна форма запису, комплексно-спряжені числа, сума, добуток, частка.
2. Абсолютна величина та аргумент комплексного числа.
3. Запис комплексного числа в тригонометричній та експоненціальній формі. Формула Ейлера.
4. Формула Муавра.

За п. 1–5 передбачається “міні-лекція”. Приклади [2]: 1, 2, 4 (всі приклади — частково), тригонометричні та гіперболічні функції (зв’язок, формула Ейлера), 59, 60, 61, 66 (всі приклади — частково).

5. Використання формул Ейлера до деяких обчислень: доведення тригонометричних тотожностей, приклади [2]: 62 (16 3), [1]: 1828, 1829, 2551.

Домашнє завдання [2]: 1, 2, 4, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67 (всі приклади — повністю), доведення тригонометричних тотожностей.

ТЕМА 2. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ (18 годин)

Заняття 7

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

До заняття рекомендовано посібники [8], [10].

1. Метод математичної індукції: 1, 3, 5, 6, 10, 10.1 (а).
2. Обчислення найпростіших границь: 46, 47, 51, 53, 55.

Домашнє завдання: 2, 4, 7, 10.1 (в), 48, 49, 52, 54, 56.

Заняття 8

ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

До заняття рекомендовано посібник [8].

1. Детальний розбір ε -означення границі послідовності: 42 (а, б), 43 (в).
2. Теорема про затиснуту послідовність, її застосування до пошуку границь: 59, 62, 63, 64.

Домашнє завдання: 42 (в, г), 43 (а, б), 44, 58, 60, 61, 65, 66.

Заняття 9

ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

1. Границя монотонної послідовності: 77, 79, 81.
2. Нерівності: 74, 75 (а).
3. Застосування критерію Коші: 82, 88.

Домашнє завдання: 69, 78, 80, 84, 85.

Заняття 10

ЧАСТИННІ ГРАНИЦІ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Частинні границі, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$: 96, 97, 100, 102, 103, 105.
2. Обмеженість функції, верхня та нижня грані: 381, 384, 388, 391, 392, 396.

Домашнє завдання: 98, 99, 101.1, 104, 113, 115, 383, 385, 393, 394.

Заняття 11

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Детальний розбір $\varepsilon - \delta$ означення границі функції: 401, 402.
2. Границя раціональної функції: 409, 411, 414, 424, 425, 429.
3. Границя ірраціональної функції: 435, 537, 439, 445, 455, 459.

Домашнє завдання: 416, 420, 423, 424.1, 428, 436, 438, 446, 450, 458.

Заняття 12

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ

1. Границя тригонометричних функцій: 473, 475, 482, 489, 489.
2. Застосування основних визначних границь до обчислень: 508, 514, 518, 522, 533, 543, 548, 556, 558, 574, 588, 590.
3. Односторонні границі: 510, 592, 594, 595, 596, 604, 606.

Домашнє завдання: 477, 480, 490, 513, 515, 531, 550, 572, 593, 597, 598, 603, 605.

Заняття 13

О-СИМВОЛИКА

1. О-символика. Еквівалентність функцій: 650 (а, б, в), 651 (а, г), 653 (б, в), 655 (б), 656 (б).
2. Застосування еквівалентностей функцій до обчислення границь: 539, 545.3, 576.1, 559, 560, 562.

Домашнє завдання: 650 (г, д, е), 651 (б, в, д, ж), 653 (а, г), 655 (а, в), 656 (в), 657 (а, в), 545.2, 561, 566, 567.

Заняття 14

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

1. Неперервність функції: 674 (б, г), 676, 678, 679, 680, 684.
2. Точки розриву та їх класифікація. Поведінка функцій у околі точок розриву: 687, 691, 693, 721, 723.
3. Рівномірна неперервність функції: 788, 792, 793, 795, 796, 799.

Домашнє завдання: 674 (в, е), 677, 681, 682, 685, 686, 694, 698, 700, 705, 712, 720, 722, 726, 789, 797, 798, 800.

Заняття 15

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: ВСТУП ТА ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ.

1. Побудувати ескіз графіка функції:

а) $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

б) $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

в) $r(\varphi) = \frac{a}{\sin 2\varphi}$.

2. Довести: $\lim_{n \rightarrow 0} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. Знайти границі:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$.

б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$.

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-3x}$.

г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$.

д) $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1 - e^{-1/x}}$.

4. При $x \rightarrow 0$ виділити головний член вигляду Cx^n функції $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

5. Дослідити на неперервність та побудувати ескіз графіка функції:

а) $f(x) = e^{-x - \frac{1}{x}}$.

б) $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right]$.

6. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, якщо $0 < x < 1$.

ТЕМА 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ (20 годин)

Заняття 16

ПОХІДНА ЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

1. Похідна явної функції: 883, 887, 902, 928, 931, 950, 966, 972, 1009.1 (а, б).
2. Використання основних прийомів диференціювання: 984 (а), 985 (а, в), 987, 1025.
3. Геометричний зміст похідної: 1058, 1063, 1064 (а), 1075.

Домашнє завдання: 865, 871, 874, 886, 929, 932, 970, 976, 985 (б, г), 986, 988, 1009.1 (в), 1024, 1064 (б), 1065.

Заняття 17

ПОХІДНА ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ ТА ФУНКЦІЇ, ЯКА ЗАДАНА ПАРАМЕТРИЧНО. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

1. Похідна оберненої функції: 1034, 1036 (а, б), 1037 (а, в).
2. Похідна функції, що задана параметрично: 1041, 1042, 1045.
3. Похідна функції, що задана в неявному вигляді: 1048, 1050, 1053, 1054 (а).
4. Диференціал функції: 1087, 1089, 1090 (г, е, ж), 1095 (а), 1100.

Домашнє завдання: 1035, 1036 (в, г), 1037 (б), 1043, 1046, 1050, 1052, 1054 (б, в), 1090 (в, д, з, и), 1101, 1105 (в).

Заняття 18

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Похідні та диференціали вищого порядку від функції, що задана в явному вигляді: 1113, 1118, 1122, 1133, 1136, 1138.
2. Від функції, що задана параметрично: 1141, 1143, 1144.
3. Від функції, що задана неявно: 1146, 1148, 1149.
4. Формула Лейбніца: 1160, 1161, 1162, 1167, 1169, 1173, 1177.

Домашнє завдання: 1111, 1114, 1119, 1123, 1125, 1136, 1140, 1142, 1148, 1150, 1159, 1163, 1165, 1170, 1174, 1178.

Заняття 19

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Похідні та диференціали більш високого порядку: 1204, 1207, 1212, 1227, 1228.

2. Теорема Ролля, Лагранжа, Коші: 1236, 1241, 1243, 1245, 1248, 1251 (а), 1252, 1263, 1264 (а).

Домашнє завдання: 1192, 1194, 1199, 1205, 1210, 1211, 1214 (а), 1220 (а), 1231, 1235, 1242, 1244, 1247, 1251 (в, г), 1256, 1259.

Заняття 20

РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

1. Розкриття невизначеностей вигляду $0/0$: 1318, 1324, 1326, 1330, 1333, 1374 (а).
2. Розкриття невизначеностей вигляду ∞/∞ : 1322, 1331, 1374 (б).
3. Розкриття невизначеностей інших типів: 1334, 1342, 1347, 1350, 1363, 1368, 1374 (г).

Домашнє завдання: 1319, 1325, 1329, 1338, 1343, 1344, 1345, 1349, 1364, 1365, 1366, 1374 (г).

Заняття 21

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Розклад Тейлора за означенням: табличні розклади, гіперболічні функції, формула Ейлера, 1376, 1379, 1390, 1388.
2. Розклад Тейлора за означенням: 1386.
3. Розклад частки функцій: 1377, 1386.
4. Метод невизначених коефіцієнтів: 1386, $\arctg x$.
5. Розклад суперпозиції функцій: 1380, 1381, 1385, 1387.

Домашнє завдання: 1388, 1382, 1383, 1384, 1390, 1389, 1391, $\operatorname{th} x$, $\arcsin x$.

Заняття 22

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1. Наближені обчислення за допомогою формули Тейлора: 1394 (а), 1395, 1396 (а, в, ж, и), 1397 (а, в).
2. Обчислення границь: 1398, 1400, 1402, 1403, 1405, 1406.2, 1406.3, 1407, 1410, 1411 (б).

Домашнє завдання: 1394 (б, г), 1396 (б, г, е, з), 1397 (б, г, д), 1399, 1401, 1404, 1406.1, 1408, 1410.1, 1411 (в).

Заняття 23

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

1. Дослідження явної функції в декартових координатах на побудова її графіку: 1476, 1485.1, 1492, 1493, 1504.

Домашнє завдання: 1481, 1483, 1509, 1510.

Заняття 24

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

1. Графіки функцій, які задані в полярній системі координат: 371 (а, д, ж), 1546, 1547.
2. Графіки функцій, які задані неявно та параметрично: 369 (в, г, е), 370 (а, г), 1538, 1552.

Домашнє завдання: 369 (б, д), 370 (б), 371 (б, г, е), 374, 1537, 1555.

Заняття 25

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

1. Знайти похідні y'_x , y''_{xx} від функції $y = y(x)$ заданої:

а) явно $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$.

б) параметрично $x = \sqrt[4]{1 + \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 + \sqrt[4]{t}}$.

в) неявно: $y^3 + 5 \ln y = x^2$.

2. Вважаючи x незалежною змінною, знайти диференціал $d^2 y$ від функції $y(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$.

3. Знайти похідну $y^{(n)}$ від функції $y(x) = (x^3 - 3x)e^{-3x}$.

4. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x} \right)^{1/x^2}$.

5. За формулою Тейлора написати розклади по цілих невід'ємних степенях змінної x до членів указанного порядку включно слідуєчих функцій:

а) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. до члена з x^4 ;

б) $f(x) = \cos(\sin x)$. до члена з x^6 .

6. Дослідити функцію та побудувати її графік:

а) $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

б) $r(\varphi) = \operatorname{tg}(a\varphi)$ ($a > 0$).

ТЕМА 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ (22 години)

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Заняття 26

ЕЛЕМЕНТАРНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Перетворення підінтегрального виразу: 1676, 1680, 1682–1684, 1699, 1700.1, 1703, 1714, 1718.

2. Метод розкладу: 1727, 1734, 1741, 1744, 1748, 1749, 1757, 1762, 1765.

Домашнє завдання: 1689, 1695, 1698, 1700.2, 1704, 1709, 1711, 1716, 1720, 1721, 1725, 1733, 1743, 1747, 1750, 1754, 1758, 1763, 1764.

Заняття 27

ЗАМІНА ЗМІННИХ. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

1. Заміна змінних: 1778, 1780, 1782, 1784, 1786, 1788, 1790.
2. Інтегрування частинами: 1792, 1798, 1800, 1806, 1810, 1816, 1828.
3. Інтегрування виразів з квадратними тричленами: 1836, 1841, 1846, 1854, 1856, 1862, 1865.

Домашнє завдання: 1778, 1781, 1783, 1788, 1790, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1797, 1801, 1809, 1814, 1837, 1842, 1844, 1853, 1857, 1861, 1863.

Заняття 28

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. МЕТОД ОСТРОГРАДСЬКОГО

1. Метод невизначених коефіцієнтів: 1866, 1868, 1870, 1872, 1883, 1884.
2. Метод Остроградського: 1891, 1893, 1895, 1898, 1901.
3. Різні прийоми інтегрування дробово-раціональних функцій: 1903, 1911, 1915, 1917, 1920, 1921.

Домашнє завдання: 1869, 1873, 1876, 1879, 1888, 1892, 1896, 1900, 1906, 1910, 1914, 1918, 1919.

Заняття 29

ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

1. Зведення до раціонального вигляду: 1926, 1927, 1929, 1931, 1933.
2. Дробово-ірраціональні функції: 1938, 1940, 1942, 1945, 1947, 1948, 1949.
3. Розклад на прості дроби. 1952, 1955, 1957, 1960.

Домашнє завдання: 1928, 1930, 1932, 1935, 1939, 1941, 1943, 1946, 1950, 1953, 1956, 1958, 1959.

Заняття 30

ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА, ЧЕБИШОВА

1. Дробово-лінійна підстановка: 1964.
2. Підстановки Ейлера: 1966, 1967.
3. Підстановки Чебишова: 1981, 1983, 1986, 1989.
4. Різні методи: 1971, 1973, 1975, 1978.

Домашнє завдання: 1968, 1969, 1970, 1972, 1974, 1976, 1979, 1982, 1984, 1987, 1990.

Заняття 31

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Формули пониження (рекурентні формули): 1991, 1993, 1996, 1998, 2000, 2005, 2011 (а), 2012 (а).
2. Формули розкладу: 2013, 2017, 2019, 2023.
3. Заміна змінних: 2026, 2028, 2030, 2032, 2035, 2039.
4. Специфічні прийоми інтегрування тригонометричних функцій: 2042, 2046, 2050, 2053, 2057, 2059.

Домашнє завдання: 1992, 1995, 1997, 1999, 2002, 2004, 2007, 2011 (б), 2012 (б), 2014, 2016, 2020, 2024, 2025, 2029, 2033, 2034, 2038, 2043, 2047, 2051, 2054, 2058, 2060.

Заняття 32

ІНТЕГРУВАННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

1. Інтегрування трансцендентних функцій: 2068, 2078, 2082, 2098, 2103, 2109, 2111, 2122, 2124.
2. Специфічні прийоми інтегрування трансцендентних функцій: 2081, 2085, 2087, 2088, 2091, 2093, 2095, 2097.
3. Різні прийоми інтегрування функцій: 1850, 1890, 1922, 1923, 2067, 2129, 2135, 2142, 2151, 2156, 2162, 2164, 2167, 2177.

Домашнє завдання: 2069, 2079, 2086, 2089, 2094, 2096, 2100, 2104, 2110, 2115, 2121, 2125, 2130, 2138, 2143, 2152, 2158, 2165, 2170.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Заняття 33

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Формула Ньютона-Лейбніца: 2212, 2213, 2216 (а, в) 2218, 2235, 2258.
2. Інтегрування частинами та заміна змінних: 2239, 2242, 2243, 2246, 2248, 2250, 2252, 2261.
3. Різні інтегралі: 2269, 2270, 2272, 2276, 2279.

Домашнє завдання: 2211, 2214, 2216 (б), 2217, 2234, 2240, 2241, 2244, 3345, 2247, 2251, 2257, 2263, 2268, 2271, 2274, 2278, 2280.

Заняття 34

ФОРМУЛИ ПОНИЖЕННЯ. ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ

1. Формули пониження. Різні інтегралі: 2281, 2283, 2286.
2. Різні інтегралі: 2288, 2290, 2293, 2297, 2300.
3. Теореми про середнє: 2316 (а, б), 2317 (а, в), 2318 (а, в), 2323, 2325, 2328, 2330.

Домашнє завдання: 2282, 2284, 2285, 2291, 2292, 2294, 2316 (в, г), 2317 (б), 2318 (б, г), 2319, 2324, 2326, 2329.

Заняття 35

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. Обчислення площ: 2397, 2402, 2407, 2413, 2417, 2419, 2422, 2426, 2429.
2. Обчислення довжин дуг: 2432, 2434, 2440, 2443, 2449.
3. Обчислення об'ємів: 2463, 2469, 2472, 2483.

Домашнє завдання: 2398, 2400.2, 2403, 2409, 2415, 2418, 2421, 2423, 2428, 2430, 2433, 2442, 2446, 2448, 2462, 2470, 2474, 2480, 2484.2.

Заняття 36

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Обчислити інтеграли (1-8):

1. $\int \sin^4 x \, dx.$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx.$

3. $\int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$

4. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$

5. $\int \frac{x \, dx}{1+x^4}.$

6. $\int \frac{x \, dx}{(x+1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}.$

7. $\int \frac{\sin x \cos x \, dx}{\sin x + \cos x}.$

8. $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx.$

9. Знайти площу фігури, обмеженої кривими, які задані:

а) в прямокутних координатах $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

б) параметрично $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3;$

в) в полярних координатах $\varphi = \sin \pi r, 0 \leq r \leq 1.$

10. Знайти об'єм тіла, обмеженого наступними поверхнями: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c.$

II семестр

ТЕМА 1. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ (6 годин)

Заняття 1

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА (повторення)

1. Обчислення площі поверхні обертання: 2489 (а), 2490 (б), 2492, 2495 (а, в), 2497.
2. Обчислення моментів та координат центру мас: 2503, 2504, 2504.1, 2510, 2512, 2513.
3. Задачі з фізики: 2517, 2520, 2523, 2524, 2526, 2530.

Домашнє завдання: 2488, 2489 (б), 2490 (а), 2491, 2493, 2495 (б), 2496, 2498, 2502, 2508, 2509, 2516, 2521, 2525, 2527.

Заняття 2

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Збіжність невластних інтегралів: 2358, 2360, 2362, 2363, 2366, 2368, 2370, 2374.
2. Абсолютна збіжність: 2378, 2380, 2380.1, 2381.

Домашнє завдання: 2359, 2361, 2364, 2365, 2367, 2369, 2371, 2372, 2373, 2379, 2380.2, 2382.

Заняття 3

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислення невластних інтегралів: 2334, 2336, 2338, 2341, 2344, 2346, 2348, 2353.
2. Головне значення за Коші: 2390, 2392, 2394.

Домашнє завдання: 2335, 2339, 2340, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2352, 2393, 2395.

ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ (18 годин)

Заняття 4

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ЯВНОЇ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ

1. Границя функції. Неперервність: 3181, 3183, 3184(а), 3185, 3187.
2. Частинні похідні: 3212.1, 3216, 3218, 3220, 3223, 3225, 3229 (а).
3. Диференціал функції: 3236, 3237, 3240.
4. Похідна в даному напрямку. Градієнт: 3341, 3344, 3345.

Домашнє завдання: 3182, 3183.1, 3183.2, 3184, 3186, 3193, 3212.2, 3217, 3219, 3224, 3228, 3235, 3239, 3241, 3243, 3246, 3342, 3343, 3346.

Заняття 5

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Похідні та диференціали явної функції: 3257, 3260, 3269, 3275.
2. Похідні та диференціали складної функції: 3283, 3285, 3289, 3294, 3302, 3309, 3311.
3. Похідні та диференціали неявної функції: 3371, 3375, 3380, 3383, 3387, 3390, 3393.

Домашнє завдання: 3259, 3262, 3271, 3273, 3278 3284, 3288, 3290, 3295, 3301, 3303, 3307, 3310, 3313, 3372, 3374, 3384, 3385, 3391.

Заняття 6

ЗАМІНА ЗМІННИХ У ВИРАЗАХ ЗІ ЗВИЧАЙНИМИ ПОХІДНИМИ

1. Похідні та диференціали параметрично заданої функції: 3407.1, 3409.
2. Заміна змінних у виразах зі звичайними похідними: 3434, 3436, 3438, 3442, 3450, 3452, 3455.

Домашнє завдання: 3407, 3407.2, 3408, 3435, 3437, 3441, 3443, 3451, 3454, 3456.

Заняття 7

ЗАМІНА ЗМІННИХ У ВИРАЗАХ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1. Заміна змінних у виразах з частинними похідними, де функція не змінюється: 3458, 3461, 3462, 3466, 3488, 3489, 3494.
2. Полярні координати: 3481, 3483, 3484.

Домашнє завдання: 3459, 3460, 3465, 3468, 3482, 3485, 3487, 3493, 3500, 3511.

Заняття 8.

ЗАМІНА ЗМІННИХ У РІЗНИХ ВИРАЗАХ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1. Заміна змінних у виразах з частинними похідними, де функція змінюється: 3470, 3475, 3477, 3480, 3513, 3517, 3522, 3527.

Домашнє завдання: 3471, 3474, 3476, 3478, 3506, 3514, 3516, 3521, 3525.

Заняття 9

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. БЕЗУМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ

1. Формула Тейлора: 3587 (а), 3588, 3595, 3597, 3599, 3602.
2. Екстремум функції декількох змінних:
 - а) явної функції: 3621, 3624, 3628, 3629, 3631, 3641.
 - б) неявної функції: 3651, 3653.

Домашнє завдання: 3585, 3586, 3587 (б), 3594, 3596, 3600, 3603, 3622, 3625, 3626, 3627.1, 3634, 3642, 3652.

Заняття 10

УМОВНИЙ ТА АБСОЛЮТНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ

1. Екстремум функції декількох змінних:
 - а) умовний екстремум: 3654, 3656, 3659, 3661, 3663, 3688.
 - б) найбільше та найменше значення в області: 3675, 3678.

Домашнє завдання: 3655, 3657, 3662, 3663.1, 3665, 3676, 3679, 3683, 3687, 3692, 3694, 3701, 3706, 3708.

Заняття 11

Повторення матеріалу з теми: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ (розв'язування складних задач, відповіді на запитання студентів).

Заняття 12

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ.

1. Обчислити інтеграл: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2. Дослідити збіжність інтегралів:

- а) $\int_0^{\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{3+x^n} dx$;

- б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$;

- в) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

3. Дослідити абсолютну збіжність інтегралу $\int_0^{\infty} x^q \sin x dx$.

4. Знайти частинні похідні першого та другого порядків від функції

$$z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

5. Для функції $z(x, y)$ знайти частинні похідні першого та другого порядків, якщо:

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

6. Показати, що функція $f(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$, ($a, b = \text{const}$) є розв'язком

рівняння $\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

7. Приймаючи u і v за нові незалежні змінні та $w(u, v)$ за нову функцію, переписати рівняння

$$z''_{xx} - 2z''_{xy} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) z''_{yy} = 0,$$

якщо $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

8. Записати у полярних координатах r і φ вираз $f = x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$.

9. Дослідити на безумовний екстремум функцію $z(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

10. Дослідити на екстремум функцію $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ за умови $x + y + z = a$.

ТЕМА 3. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. (20 годин)

Заняття 13

ЗВЕДЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ПОВТОРНОГО

1. Заміна порядку інтегрування: 3916, 3920, 3921, 3924, 3926, 3928, 3930, 3948, 3950.
2. Заміна змінних. Якобіан переходу: 3937, 3938, 3943, 3944, 3957, 3958.
3. Зведення подвійного інтеграла до однократного: 3962, 3964.

Домашнє завдання: 3917, 3919, 3922, 3925, 3927, 3929, 3931, 3940, 3941, 3945, 3946, 3949, 3951, 3953, 3959, 3963.

Заняття 14

ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислення подвійних інтегралів. 3965, 3967, 3969, 3971, 3972.
2. Обчислення площ: 3984, 3987, 3991, 3994, 3997, 3999, 4003.

Домашнє завдання: 3966, 3968, 3970, 3973, 3985, 3988, 3990, 3992, 3995, 3996, 3999, 4004.

Заняття 15

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМІВ

1. Обчислення об'ємів: 4008, 4009, 4013, 4015, 4016, 4021, 4026, 4032.
2. Обчислення площ поверхонь: 4036, 4038, 4045.

Домашнє завдання: 4007, 4012, 4014, 4017, 4022, 4023, 4025, 4037, 4040, 4044, 4047.

Заняття 16

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ У ФІЗИЦІ

1. Обчислення центру мас: 4053, 4054, 4057.
2. Обчислення моментів інерції: 4062, 4063.
3. Інші приклади на застосування подвійних інтегралів: 4070, 4073.

Домашнє завдання: 4052, 4056, 4058, 4064, 4067, 4069, 4071, 4072, 4074.

Заняття 17

ЗВЕДЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ПОВТОРНИХ

1. Обчислення потрійних інтегралів: 4078, 4080.
2. Заміна порядку інтегрування: 4081, 4083, 4084, 4086.
2. Заміна змінних. Якобіан переходу: обчислення якобіану для циліндричних та сферичних координат, 4078, 4080, 4088, 4091, 4092, 4094.

Домашнє завдання: 4076, 4077, 4079, 4082, 4085, 4087, 4090, 4093, 4095.

Заняття 18

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислення інтегралів та об'ємів: 4101, 4104, 4106, 4107, 4109, 4112, 4113, 4116, 4116.1, 4117, 4118.

Домашнє завдання: 4102, 4103, 4105, 4108, 4110, 4111, 4114, 4118.1, 4118.2, 4120.

Заняття 19

ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ У ФІЗИЦІ

1. Обчислення центру мас: 4133, 4136, 4138, 4140.
2. Обчислення моментів інерції: 4143, 4144, 4145, 4149, 4150.
3. Інші приклади на застосування потрійних інтегралів: 4155, 4157.

Домашнє завдання: 4134, 4135, 4137, 4139, 4146, 4147, 4148, 4149.1, 4151, 4153, 4154, 4158, 4160.

Заняття 20

n -КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. НЕВЛАСНІ КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Власні n -кратні інтеграли: 4204 (а), 4205, 4207, 4211, 4213.
2. Невласні кратні інтеграли: 4161, 4171, 4175, 4176, 4179, 4181, 4183, 4196.

Домашнє завдання: 4162, 4165, 4172, 4174, 4177, 4180, 4182, 4185, 4195, 4197, 4204(б), 4206, 4208, 4210, 4212.

Заняття 21

Повторення матеріалу з теми: КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ (розв'язування складних задач, відповіді на запитання студентів).

Заняття 22

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$

2. Різними способами розставити межі у циліндричних координатах:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

3. Обчислити інтеграл: $\iint_{x^4+y^4 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy.$

4. Знайти площу, обмежену наступними кривими $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = p$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $\frac{x}{a} = p^2 \frac{y}{b}$.

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею: $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

7. Обчислити інтеграл: $\iint_{1 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$

8. Знайти координати центру мас конуса з висоти h та радіусом основи R (вибрати зручну систему координат).

ТЕМА 4. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ (24 годин)

Заняття 23

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ I ТА II РОДУ

1. Криволінійні інтеграли I роду та їх застосування: 4222, 4224, 4229, 4232, 4237, 4239.
2. Криволінійні інтеграли II роду: 4248, 4250, 4252, 4254, 4256.

Домашнє завдання: 4223, 4225, 4226, 4228, 4230, 4231, 4238, 4240, 4249, 4251, 4253, 4255, 4257.

Заняття 24

ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ I ТА II РОДУ

1. Випадок повного диференціалу: 4258, 4264, 4267, 4271, 4284, 4290.
2. Застосування криволінійних інтегралів: 4244, 4244.2, 4245.

Домашнє завдання: 4259, 4263, 4266, 4269, 4272, 4285, 4291, 4241.1, 4243, 4293, 4294, 4295.

Заняття 25

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ І РОДУ

1. Поверхневі інтеграли I роду: 4343, 4346, 4350, 4352.1, 4353, 4355, 4358.

Домашнє завдання: 4342, 4345, 4349, 4352, 4354, 4356, 4356.2, 4357, 4362.2.

Заняття 26

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ II РОДУ

1. Поверхневі інтеграли II роду: 4362, 4364, 4366; за збірником [3]: 11.3–11.6, 11.26.

Домашнє завдання: 4363, 4365; за збірником [3]: 11.7–11.9, 11.25.

Заняття 27

ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ФОРМУЛА ГРІНА

1. Обчислення криволінійних інтегралів по замкненому контуру: 4279, 4281, 4283.

2. Формула Гріна: 4299, 4300, 4307, 4308, 4311, 4313.

Домашнє завдання: 4280, 4282, 4298, 4302, 4309, 4310, 4312, 4315.

Заняття 28

ФОРМУЛИ ОСТРОГРАДСЬКОГО-ГАУССА, СТОКСА (інтегральні теореми)

1. Формула Остроградського-Гаусса: 4376, 4377, 4382, 4385.1, 4387, 4389; за збірником [3]: 10.1, 10.14, 10.16, 11.15, 11.16.

2. Формула Стокса: 4368, 4371, 4372; за збірником [3]: 10.2,

Домашнє завдання: 4367, 4369, 4370, 4373, 4374, 4378, 4379, 4381, 4384, 4388, 4390; за збірником [3]: 10.3, 10.10, 10.12, 10.15, 10.17, 11.9, 11.10, 11.11.

Заняття 29

ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛ ГРІНА, ОСТРОГРАДСЬКОГО-ГАУССА, СТОКСА

До заняття рекомендовано вказівки [7].

1. Формула Гріна: 4320.1, 4323, 4327, 4329.

2. Формула Остроградського-Гаусса: 4391, 4392, 4395, 4397.

3. Формула Стокса: 4375.

Домашнє завдання: 4320, 4321, 4324, 4325, 4326, 4332, 4334, 4374, 4393, 4394, 4396.

Заняття 30

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

До заняття рекомендовано вказівки [7].

1. Обчислення градієнту. Фізичний зміст градієнту: 4408, 4410, 4412, 4416, 4417.
2. Обчислення дивергенції. Фізичний зміст дивергенції: 4424, 4428, 4429, 4430, 4442, 4444, 4447.

Домашнє завдання: 4409, 4411, 4413, 4418, 4425, 4426, 4427, 4432, 4441, 4443, 4445, 4445.1; за збірником [3]: 8.2, 8.4, 8.21 (1, 2, 4), 8.22 (4, 8, 9), 8.26 (1, 2).

Заняття 31

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

До заняття рекомендовано вказівки [7].

1. Обчислення ротора. Фізичний зміст ротора: 4435, 4436, 4437, 4440, 4452, 4454.
2. Операції другого порядку: 4439 (а).
3. Оператор Лапласа: 4414, 4425, 4426, 4449.

Домашнє завдання: 4436.1, 4438, 4439 (б), 4453, 4455; за збірником [3]: 8.25, 8.26 (6, 9, 10).

Заняття 32

ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ. КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ

До заняття рекомендовано вказівки [7].

1. Операція $\vec{\nabla}\varphi$ в ортогональній криволінійній системі координат. Обчислення параметрів Ламе: загальний випадок, циліндрична система координат, сферична система координат [3]: 9.23.
2. Операція $\operatorname{div}\vec{A}$ в ортогональній криволінійній системі координат: загальний випадок, циліндрична система координат, сферична система координат [3]: 9.25.
3. Операція $\operatorname{rot}\vec{A}$ в ортогональній криволінійній системі координат: загальний випадок, циліндрична система координат, сферична система координат [3]: 9.24.
4. Оператор Лапласа $\Delta\varphi$ в ортогональній криволінійній системі координат: загальний випадок, циліндрична система координат, сферична система координат: 9.38–9.40.

Домашнє завдання: Знайти параметри Ламе, записати диференціальні операції для еліптичних, параболічних, гіперболічних координат [3]: 9.33–9.36, 9.50 (1–4), 9.53, 9.54.

Заняття 33

Повторення матеріалу з теми: КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ (розв'язування складних задач, відповіді на запитання студентів).

Заняття 34

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.
ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ.

1. Обчислити інтеграл $\int_C (x^{4/3} + y^{4/3}) dl$, де C — дуга астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

2. Обчислити інтеграл $\int_C xy^2 dx - x^2 y dy$, де C — замкнена крива $x^2 + y^2 = a^2$.

3. Обчислити інтеграл $\oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, де C — контур $x = \cos t$, $y = \cos 2t$,
 $z = \cos 3t$.

4. Знайти масу параболічної оболонки $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (де $0 \leq z \leq 1$), густина якої змінюється за законом $\rho(z) = \alpha z$.

5. Знайти інтеграл $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, де S — зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6. Обчислити:

а) $\vec{\nabla} \left((\vec{a} \cdot \vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \right)$;

б) $\operatorname{div} \left(\vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right)$;

в) $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot f(r))$;

г) $\Delta \frac{1}{r^n}$,

де \vec{a} та \vec{k} — сталі вектори, $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

III семестр

ТЕМА 1. РЯДИ.

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА (24 години)

Заняття 1

ПОВТОРЕННЯ

1. Розклад функції за формулою Тейлора: 1386, 1387, 1407, 2845, 2848.
2. Інтегрування виразів з квадратними тричленами: 1852, 1856, 1857, 1864, 1937, 1940, 1942.
3. Інтегрування трансцендентних функцій: 2087, 2088, 2103, 2110, 2112, 2114, 2161.
4. Обчислення різних інтегралів: 2133, 2135, 2138, 2146, 2151.

Домашнє завдання: 1385, 1389, 1410.1, 1851, 1855, 1859, 1865, 1938, 1939, 1941, 2089, 2090, 2109, 2111, 2113, 2115, 2132, 2136, 2137, 2147, 2162, 2843, 2846.

Заняття 2

ЧИСЛОВІ РЯДИ. ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1. Обчислення найпростіших сум: 2549, 2551, 2552.
2. Збіжність рядів. Ознаки порівняння: 2558, 2560, 2562, 2564.
3. Критерій Коші та його застосування: 2574, 2576, 2577.1.

Домашнє завдання: 2547, 2548, 2550, 2557, 2559, 2561, 2563, 2573, 2575, 2575.1, 2577.

Заняття 3

ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОСТАЛИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1. Збіжність знакосталих рядів: 2582, 2586, 2589.2, 2603, 2619, 2621, 2626, 2629, 2632, 2635, 2636, 2639, 2642.

Домашнє завдання: 2580, 2583, 2587, 2588, 2589.1, 2590, 2596, 2602, 2617, 2620, 2627, 2630, 2633, 2637, 2640, 2643.

Заняття 4

ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОЗМІННИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1. Збіжність знакозмінних рядів: 2660, 2661, 2667, 2669, 2670, 2671, 2673.1.
2. Абсолютна та умовна збіжність рядів: 2675, 2677, 2680, 2682, 2684, 2686.

Домашнє завдання: 2663, 2668, 2673, 2676, 2678, 2679, 2683, 2685, 2689, 2696,.

Заняття 5

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЗБІЖНІСТЬ

1. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей: 2746, 2750, 2752, 2754, 2755 (а), 2757.
2. Рівномірна збіжність функціональних рядів: 2767, 2768.1, 2770, 2774 (а, в, д, ж, и, к), 2775, 2778.

Домашнє завдання: 2748, 2751, 2753, 2755 (б), 2756, 2758, 2768, 2769, 2771, 2774 (б, г, м), 2776, 2777, 2780, 2781.

Заняття 6

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЗБІЖНІСТЬ

1. Радіус збіжності: 2813, 2815, 2816, 2818, 2821, 2825, 2828, 2830, 2834.
2. Ряд Тейлора: 2840, 2852, 2855, 2857, 2861, 2864, 2867.

Домашнє завдання: 2814, 2817, 2819, 2820, 2824, 2826, 2827, 2833, 2836, 2851, 2853, 2856, 2858, 2860, 2865, 2868.

Заняття 7

ІНТЕГРУВАННЯ, ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ ТА ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

1. Диференціювання рядів: 2792, 2795 (б), 2798, 2799 (а).
2. Інтегрування рядів: 2803, 2805, 2810.
3. Розклад інтеграла в степеневий ряд: 2901, 2904, 2905.
4. Підсумовування рядів: 2906, 2908, 2910, 2911, 2913, 3002, 3006, 3011.

Домашнє завдання: 2795 (в), 2797, 2799 (б), 2902, 2903, 2907, 2909, 2912, 2932 (б, е, и, к, л, м), 3003, 3007, 3012.

Заняття 8

ВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

1. Неперервність за параметром: 3712, 3713 (а), 3715, 3716.
2. Диференціювання по параметру: 3717, 3718 (а, г), 3726.
3. Обчислення інтегралів за допомогою інтегрування та диференціювання по параметру: 3732, 3735, 3237, 3738 (а).

Домашнє завдання: 3713 (б, в, г), 3718 (б, в, д), 3725, 3733, 3734, 3736, 3738 (б).

Заняття 9

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА.

1. Рівномірна збіжність: 3741, 3743, 3746, 3747, 3754, 3756, 3758, 3761, 3764, 3779, 3783.
2. Диференціювання та інтегрування по параметру: 3791, 3793, 3789, 3796.

Домашнє завдання: 3742, 3744, 3749, 3750, 3755, 3757, 3760, 3762, 3765, 3780, 3782, 3790, 3792, 3794, 3795, 3798, 3800.

Заняття 10

ІНТЕГРАЛИ ЕЙЛЕРА

1. Ейлерові інтегралаи: 3843, 3846, 3849, 3851, 3856, 3860, 3863, 3866, 3868
2. Формула Стерлінга: 3111, 3120 (а, г).

Домашнє завдання: 3118, 3120 (б, в), 3844, 3845, 3847, 3848, 3850, 3855, 3857, 3859, 3862, 3865, 3867, 3872, 3873, 3876.

Заняття 11

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

1. Інтегралаи Пуассона, Діріхле, Лапласа, Френеля: 3803, 3808, 3811, 3812, 3814, 3818, 3820, 3825, 3827, 3830, 3832, 3835 (а).

Домашнє завдання: 3804, 3806, 3810, 3813, 3815, 3819, 3822, 3826, 3828, 3831, 3835 (б, г).

Заняття 12

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З ТЕМИ: РЯДИ. ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА.

1. Визначити область абсолютної та умовної збіжності:

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin(nx)}{1+n^q};$$

б)
$$\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^{ax}) dx.$$

2. Знайти радіус збіжності і дослідити збіжність у граничних точках ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

3. Знайти диференціюванням суму ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

4. Знайти інтегруванням суму ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^2}{(2n+1)!}.$$

5. Розкласти у степеневий ряд
$$f(x) = \frac{x \operatorname{sh} a}{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2}.$$

6. Обчислити інтеграл
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

7. Знайти інтеграл
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx.$$

8. Виразити через інтеграли Ейлера $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^n dx$.

9. Обчислити за допомогою інтегралів Ейлера: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

ТЕМА 2. АНАЛІЗ ФУР'Є (12 годин)

Заняття 13

РОЗКЛАД ФУНКЦІЇ В РЯД ФУР'Є

До заняття рекомендовано вказівки [5].

1. Розклад довільних функцій: 2939, 2943, 2948.
2. Розклад парних функцій: 2942, 2945, 2950, 2957, 2960, 2961 (а).
3. Розклад непарних функцій: 2940, 2946, 2949, 2961 (б), 2962.
4. Інші розклади: 2965, 2967, 2970, 2973.

Домашнє завдання: 2944, 2947, 2951, 2953, 2958, 2961 (в), 2966, 2969, 2971, 2972.

Заняття 14

РЯДИ ФУР'Є

До заняття рекомендовано вказівки [5].

1. Ряд Фур'є у комплексній формі [5]: 1, 3, 4, 7, 11.
2. Властивості рядів Фур'є: 2978, 2981, 2983, 2985.
3. Нерівність Бесселя (НБ) та рівність Парсеваля (РП): 2963, 2985. Записати НБ та РП для прикладів: 2940, 2944, 2950, 2966, 2969, 2971.

Домашнє завдання [5]: 2, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 19; 2979; [1]: 2980, 2982, 2984; записати НБ для прикладів: 2965, 2967; записати РП для прикладів: 2942, 2951.

Заняття 15

ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

1. Розклад функцій в інтеграл Фур'є: 3881, 3883, 3885, 3887, 3889, 3894, 3900 (а); за вказівками [5]: 1, 6, 10.
2. Парне та непарне продовження функцій: 3895.

До заняття рекомендовано вказівки [4], [5].

Домашнє завдання: 3882, 3884, 3886, 3888, 3890, 3893, 3896, 3899, 3900 (б).

Заняття 16

ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

До заняття рекомендовано вказівки [4], [5].

1. Властивості Фур'є-зображень [5]: 11, 12, 13, 14, 15, 16.
2. δ -функція та її елементарні властивості (за [4], [5]).

Домашнє завдання: наведено у [4], [5].

Заняття 17

БАГАТОВИМІРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є. ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІЗУ ФУР'Є

До заняття рекомендовано вказівки [4], [5].

1. Багатовимірне перетворення Фур'є [5]: 26, 28, 30.
2. Перетворення Фур'є операцій диференціювання (виведення).
3. Застосування аналізу Фур'є для розв'язування диференціальних рівнянь [5]: 25, 27, 29.

Домашнє завдання: наведено у [4], [5]. Підготуватись до підсумкової контрольної роботи.

Заняття 18

ПІДСУМКОВА КОНТРОЛЬНА РОБОТА.

1. Дослідити функцію $y(x) = x^{1/x}$ та побудувати її графік.
2. Дослідити функцію $r(\varphi) = a(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, $\varepsilon < 1$. та побудувати її графік.
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.
4. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
5. Обчислити $\Delta \left(\frac{f(r)}{r} \right)$, $r = |\vec{r}|$.
6. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x) = \arccos x$.
7. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{1+x^p} dx$, $p \geq 0$.
8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{a} \right|$.
9. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію $f(x) = x \sin x$ на інтервалі $x \in [-\pi, \pi]$.
10. Знайти фур'є-образ функції $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

Література

- [1] Б.П. Демидович, *Сборник задачи упражнений по математическому анализу*, М. Наука, 1990.
- [2] Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, М. «Наука», 1979.
- [3] М.Ф. Ледней, М.А. Разумова, О.В. Романенко, В.М. Хотяїнцев, *Збірник задач з векторного та тензорного аналізу (навч. посібник)*, К., РВЦ “Київський університет”, 2003
- [4] В.Н. Хотяинцев, *Методические рекомендации к практическим занятиям по курсу «математический анализ» (тема «Преобразование Фур'є)*, К. КГУ, 1988.
- [5] М.В. Макарець, М.А. Разумова, *Аналіз Фур'є (методичні рекомендації)*, К., РВЦ “Київський університет”, 2001.
- [6] С.В. Извекон, М.В. Макарець, Ю.І. Прилуцький, *Методичні вказівки до проведення практичних занять з математичного аналізу для студентів фізичного факультету*, К., РВЦ “Київський університет”, 1997.
- [7] М.В. Макарець, *Методические указания к решению задач по теме «Начала векторного анализа»*, К. КГУ, 1988.
- [8] В.А. Вишенський та інші, *Вибрані питання елементарної математики*, К., Вища школа, 1972.
- [9] Б.А. Зельдович, И.М. Яглом, *Высшая математика для начинающих физиков и техников*, М., Наука, 1982.
- [10] Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд, *Математический анализ*, М., Просвещение, 1973.

**Методичні вказівки
до проведення семінарських занять
з математичного аналізу**

Упорядники: Гнатовський В.О., Ледней М.Ф., Макарець М.В., Романенко О.В.

ПП «Elena and Ko»

08001, м. Обухів Київської обл., вул. Шкільна, 16

Підписано до друку 12.04.2015

Папір друк № 1. Спосіб друку офсетний

Умовн. фарбо-відб. 1.0

Наклад 100

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$

Умовн. друк. арк. 1.0

Обл.-вид. арк. 0.9

Зам. № 9-1288