

Київський Національний університет
імені Тараса Шевченка

*М. В. Макарець, В. Ю. Решетняк,
О. В. Романенко*

ЗАДАЧІ З КЛАСИЧНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Навчальний посібник
для студентів природничих факультетів

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
«Київський університет»
2006

УДК 530.145
ББК 22.331

версія від 26.12.2005

М. В. Макарець, В. Ю. Решетняк, О. В. Романенко
Задачі з класичної електродинаміки: Навчальний посібник
для студентів природничих факультетів. — К.: ВПЦ «Київський
університет», 2005.-151 с.

Рецензенти: І. П. Пінкевич, доктор фіз.-мат. наук, професор,
С. М. Єжов, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Затверджено Радою
фізичного факультету
?? ??? 2003 року

????????-???
РВЦ «Київський університет»

ББК 22.31

У посібнику приведено більше 150 задач середнього рівня складності, які охоплюють основні розділи класичної електродинаміки і можуть розглядатися як мінімальний набір вправ, які потрібно виконати для засвоєння цього курсу. У вступній частині приведені короткі теоретичні відомості, до більшості задач даються детальні розв'язки.

Для студентів і аспірантів фізико-математичних спеціальностей.

© М. В. Макарець, В. Ю. Решетняк, О. В. Романенко, 2006

Зміст

Передмова	4
Частина I. Основні поняття, формули та закони	5
Частина II. Задачі	17
§ 1. Векторний аналіз	17
§ 2. Експериментальні закони електродинаміки	19
§ 3. Електростатика	20
§ 4. Магнітостатика. Квазістаціонарне наближення	24
§ 5. Випромінювання та розсіювання електромагнітних хвиль	27
§ 6. Спеціальна теорія відносності. Релятивістська механіка та електродинаміка	30
§ 7. Поширення електромагнітних хвиль. Хвилеводи та резонатори. Магнітна гідродинаміка	32
Частина III. Вказівки та розв'язки	35
Додатки	134
§ 1. Основні формули векторного аналізу	134
§ 2. Криволінійні координати	135
§ 3. Диференціальні операції в криволінійних координатах	136
§ 4. Дельта-функція Дірака	138
§ 5. Еліптичні інтеграли	141
§ 6. Функції Бесселя	142
§ 7. Поліноми Лежандра	146
§ 8. Приєднані функції Лежандра	147
§ 9. Сферичні гармоніки	148

Передмова

Курс класичної електродинаміки є другим фундаментальним курсом теоретичної фізики, який читається протягом двох семестрів для студентів фізичних спеціальностей. За своїми математичними методами він частково перекривається з курсом математичної фізики, який часто викладається паралельно. Така побудова програми потребує попереднього ознайомлення студентами з деякими розділами математичної фізики (зокрема, з методом розділення змінних та властивостями спеціальних функцій), але це не ускладнює розуміння курсу в цілому, оскільки ці поняття виникають в електродинаміці абсолютно природньо.

Посібник орієнтований на студентів-фізиків, і укладений згідно з програмою з класичної електродинаміки. Він є узагальненням багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни кафедрою теоретичної фізики на фізичному факультеті. Усі задачі, наведені у посібнику, є стандартними і певною мірою можуть розглядатись як програма-мінімум, яку має виконати студент для успішного засвоєння даного розділу теоретичної фізики.

Збірник складається з чотирьох частин. У першій частині наведено основні теоретичні відомості та необхідні формули. Детальне викладення теорії читач може знайти в літературі (див. список літератури). У другій частині наведені умови задач, а в третій — відповіді та повні розв'язки до більшості з них. У додатках приводяться частовживані векторні тотожності, формули для диференціальних операцій у криволінійних координатах та деякі формули з теорії спеціальних функцій. Передбачається, що студент попередньо ознайомлений з основними властивостями поліномів Лежандра, функціями Бесселя та еліптичними інтегралами по одному з стандартних курсів.

Автори вдячні своїм колегам з кафедри теоретичної фізики за цінні зауваження та пропозиції, які були враховані при укладанні даного посібника, а також студенту другого курсу Денису Давидову за допомогу в підготовці рукопису.

Частина I

Основні поняття, формули та закони

Електромагнітне поле в точці \mathbf{r} у момент часу t задається вектором напруженості електричного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ і вектором індукції магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Ці величини визначаються за силою, яка діє на електричний заряд q :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

і на елемент провідника довжиною $d\mathbf{l}$ зі струмом I :

$$d\mathbf{F} = i[d\mathbf{l}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (1.2)$$

відповідно.

Експериментальні закони електродинаміки, а саме:

- 1) закон Кулона;
- 2) закон Ампера;
- 3) закон електромагнітної індукції;
- 4) закон збереження заряду

формулюються у вигляді рівнянь Максвелла для векторів напруженостей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ та $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — густина електричного заряду і густина електричного струму в точці \mathbf{r} у момент часу t , відповідно, які вважаються відомими функціями, константи “проникностей вакуу-

ма" $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, $\epsilon_0 \mu_0 = c^2$, c — швидкість світла у вакуумі.

Рівняння Максвелла в інтегральній формі мають вигляд

$$\oint_L \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) dl = \mu_0 \int_{S(L)} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{c^2} \int_{S(L)} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.4)$$

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \oint_L \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(L)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.5)$$

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho(\mathbf{r}, t) dV, \quad (1.6)$$

де $\boldsymbol{\tau}$ — орт дотичної до кривої L , $S(L)$ — довільна поверхня обмежена замкненим контуром L , \mathbf{n} — орт нормалі до поверхні; $V(S)$ — об'єм, обмежений довільною замкненою гладкою поверхнею S .

Рівняння Максвелла (1.3) набувають найпростішого вигляду у випадку, коли струми не залежать від часу:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

і описують, відповідно, явища електро- і магнітостатики.

Перше рівняння системи (1.4) задовольняється, коли $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, а з другого випливає рівняння Пуассона для потенціалу $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (1.8)$$

Його розв'язок у випадку, коли відсутні граничні поверхні, має вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.9)$$

Якщо відстань $r \gg d$, де d — розмір системи, тоді з (1.9) випливає (так званий мультипольний розклад):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) + \dots \quad (1.10)$$

де введені позначення:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.11)$$

для потенціалу, створеного повним зарядом системи $q = \int \rho(\mathbf{r}') dV'$;

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.12)$$

для потенціалу дипольного моменту \mathbf{p} системи

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.13)$$

та

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2!} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.14)$$

для потенціалу квадрупольного моменту Q_{ij} системи

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'. \quad (1.15)$$

Енергія електростатичного поля у вакуумі:

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \varphi(r) dV = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dV' dV'', \quad (1.16)$$

а енергія взаємодії двох систем зарядів

$$W_{12} = \int_V \rho_1(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (1.17)$$

Друге рівняння системи (1.7) буде задовольнятися, якщо для магнітного поля покласти $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, а з першого рівняння тоді отримаємо рівняння Пуассона для векторного потенціалу $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (1.18)$$

з розв'язком (у вакуумі):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.19)$$

Якщо відстань від точки спостереження до системи струмів значно перевищує її розміри, то

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) + \dots, \quad (1.20)$$

де введено позначення:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3} \quad (1.21)$$

для векторного потенціалу магнітного дипольного моменту системи струмів

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}', \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV'. \quad (1.22)$$

Енергія магнітостатичного поля у вакуумі

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}')^2 dV', \quad (1.23)$$

а енергія взаємодії двох систем струмів

$$W_{12m} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{A}_2(\mathbf{r}') dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_V \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (1.24)$$

Для електромагнітного поля справедливі закони збереження:

1) енергії:

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \oint_{S(V)} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{j}_z \mathbf{E} dV, \quad (1.25)$$

де $w = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2)$ — густина енергії електромагнітного поля у вакуумі, $\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ — вектор Умова–Пойтинга, який характеризує густину потоку енергії, \mathbf{j}_z — густина зовнішнього струму, який не входить до даної системи зарядів і струмів;

2) імпульсу:

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{fi} dV = - \oint_{S(V)} T_{ij} n_j dS, \quad (1.26)$$

де $\mathbf{P}_f = \frac{1}{c^2} \mathbf{\Pi}$ — густина імпульсу електромагнітного поля, а

$$T_{ij} = \omega \delta_{ij} - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j)$$

— тензор максвеллових напружень;

3) моменту імпульсу:

$$\frac{d}{dt} \int_V L_{fx} dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (y T_{zj} - z T_{yj}) dV + \int_V (T_{zy} - T_{yz}) dV, \quad (1.27)$$

де $L_f = \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{P}_f] dV$ — момент імпульсу поля.

У випадку змінних у часі полів векторний $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ і скалярний $\varphi(\mathbf{r}, t)$ потенціали електромагнітного поля вводяться так, що поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.28)$$

залишаються незмінними при калібрувальному перетворенні потенціалів, яке має вигляд:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi'(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.29)$$

де \mathbf{A}' і φ' — нові векторний і скалярний потенціали, а $f(\mathbf{r}, t)$ — довільна функція. При накладенні на потенціали умови калібровки Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.30)$$

із рівнянь Максвелла випливають хвильові рівняння для потенціалів у вакуумі:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}, \quad (1.31)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.32)$$

За відсутності заряджених поверхонь вони мають розв'язки, які називаються запізнювальними потенціалами:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.33)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.34)$$

Кутовий розподіл потоку енергії P випромінювання від джерела з центром у точці $\mathbf{r} = 0$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{n}r^2 \quad (1.35)$$

де \mathbf{n} — орт напрямку. У випадку періодичних полів це дає кутовий

розподіл інтенсивності I випромінювання у вигляді

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{l=1}^{\infty} [\mathbf{E}_l(\mathbf{r}), \mathbf{B}_l^*(\mathbf{r})] \cdot nr^2, \quad (1.36)$$

де $\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp\left(i\frac{2\pi lt}{T}\right) dt$ — l -ий коефіцієнт ряду Фур'є для поля, T — період. У випадку короткочасного випромінювання з (1.35) впливає формула для кутового і спектрального розподілів енергії випромінювання W :

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\pi\mu_0} \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, \omega)] \cdot nr^2 \quad (1.37)$$

та

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dW}{d\Omega d\omega} d\omega, \quad (1.38)$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt$ — фур'є-образ поля. Якщо відстань до джерела $r \gg d$, то формули (1.36) — (1.37) набувають вигляду:

а) для періодичного поля

$$\frac{dI_l}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{2(4\pi)^2} |[\mathbf{k}_l, \mathbf{j}_l(\mathbf{k}_l)]|^2, \quad (1.39)$$

де $\mathbf{k}_l = \frac{l\omega}{c} \mathbf{n}$ — хвильовий вектор для l -ої гармоніки поля, а

$$\mathbf{j}_l(\mathbf{k}_l) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i(l\omega t - \mathbf{k}_l \mathbf{r})} dt dV = \int_V \mathbf{j}_l(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_l \mathbf{r}} dV \quad (1.40)$$

є перетворенням Фур'є по координатах і коефіцієнтом ряду Фур'є за часом від густини струму;

б) для короткочасного випромінювання

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{\mu_0 l}{2(4\pi)^2} |[\mathbf{k}, \mathbf{j}(\mathbf{k})]|^2, \quad (1.41)$$

де $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ — хвильовий вектор для частоти ω ,

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} dt dV \quad (1.42)$$

повне перетворення густини струму.

Якщо додатково виконується ще й умова дипольного наближення $k_l d = \frac{\omega l}{c} d \ll 1$, яка можлива тільки для скінченної кількості гармонік l , то кутовий розподіл інтенсивності електричного дипольного випромінювання має вигляд

$$\left(\frac{dI_l}{d\Omega} \right)_{e. \partial.} = \frac{(l\omega)^4}{(4\pi)^2} \frac{p_l^2}{2\epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta, \quad (1.43)$$

а повна інтенсивність випромінювання дається виразом:

$$I_l = \frac{(l\omega)^4 p_l^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (1.44)$$

де $\mathbf{p}_l = \int_V \mathbf{r} \rho_l(\mathbf{r}) dV$ — l -та гармоніка дипольного моменту джерела. У випадку, коли дипольний момент системи $\mathbf{p} = 0$, треба врахувати більш високі мультиполя: магнітний диполь і електричний квадруполь. Кутовий розподіл інтенсивності магнітного дипольного випромінювання:

$$\left(\frac{dI_l}{d\Omega} \right)_{m. \partial.} = \frac{(l\omega)^4 m_l^2}{(4\pi)^2 2\epsilon_0 c^5} \sin^2 \theta, \quad (1.45)$$

де $\mathbf{m}_l = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}_l(\mathbf{r})] dV$ — l -та гармоніка магнітного дипольного моменту. Кутовий розподіл інтенсивності електричного квадрупольного випромінювання

$$\left(\frac{dI_l}{d\Omega} \right)_{e. \kappa 6.} = \frac{(l\omega)^6}{9 \cdot 2^7 \pi^3 \epsilon_0 c^5} |[\mathbf{n}, \mathbf{Q}_l]|^2, \quad (1.46)$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{Q}_l = \mathbf{e}_i n_j (Q_{ij})_l$, $(Q_{ij})_l$ — l -та гармоніка тензора квадрупольного моменту системи $(Q_{ij})_l = \int_V \rho_l(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV$.

Основні положення спеціальної теорії відносності Ейнштейна:

1) швидкість c світла у вакуумі постійна в усіх інерціальних системах відліку, не залежить від швидкості джерела і дорівнює $c = 2.99793 \cdot 10^8 \text{ м/с}$;

2) усі явища природи відбуваються однаково в усіх інерціальних системах відліку.

Адекватне висвітлення явищ досягається при введенні чотири-вимірною псевдоевклідового простору з метричним тензором

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

і координатами $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Тоді перетворення звичайних координат і часу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої випливають з перетворень Лоренца для вектора

$$x^{\mu} = L_{\nu}^{\mu}(\mathbf{v})x^{\nu}, \quad (1.48)$$

де матриця лоренцевих поворотів у випадку $\mathbf{v} \parallel Ox$ має вигляд

$$L_{\nu}^{\mu}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

де $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор. Перетворення для тензора другого рангу мають такий вигляд:

$$T^{\mu\nu} = L_{\rho}^{\mu}L_{\sigma}^{\nu}T'^{\rho\sigma}, \quad T_{\nu}^{\mu} = L_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\nu}^{\sigma}T'_{\sigma}{}^{\rho}, \quad T_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}T'_{\rho\sigma}, \quad (1.50)$$

де

$$\Lambda_{\mu}^{\nu}(\mathbf{v}) = (L^{-1})_{\mu}^{\nu} = L_{\mu}^{\nu}(-\mathbf{v}) \quad (1.51)$$

обернена матриця перетворень Лоренца.

Електромагнітне поле описується антисиметричним тензором електромагнітного поля

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

або 4-потенціалом

$$A^{\mu} = (\varphi, c\mathbf{A}). \quad (1.53)$$

Заряди і струми задаються 4-струмом

$$j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (1.54)$$

Частота і хвильовий вектор задаються хвильовим 4-вектором

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (1.55)$$

Рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{j^\mu}{\epsilon_0 c}, \quad \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \nabla^\nu F^{\sigma\rho} = 0, \quad (1.56)$$

де $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ — повністю антисиметричний тензор Леві-Чивіта четвертого рангу із значенням $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 1$, коли індекси парною перестановкою можна звести до зростаючої послідовності, $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = 0$, коли є однакові індекси, $\epsilon_{\mu\nu\sigma\beta} = -1$ у решти випадків. Рівняння для потенціалів при калібровці Лоренца $\nabla_\mu A^\mu = 0$ мають вигляд:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A^\nu = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c}. \quad (1.57)$$

Релятивістські рівняння руху можна використовувати у формі рівнянь Ньютона для 4-імпульсу

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad (1.58)$$

де $d\tau = dt/\gamma$, $F^\mu = (\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})/c, \gamma \mathbf{F})$, \mathbf{F} — класична сила, що діє на тіло маси m .

Релятивістська функція Лагранжа для частинки m в електромагнітному полі має вигляд

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi, \quad (1.59)$$

а релятивістська функція Гамільтона:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2} + e\varphi, \quad (1.60)$$

де \mathbf{P} — узагальнений імпульс частинки.

Атоми суцільного середовища в зовнішньому електромагнітному полі поляризуються, тому до заданих ρ і \mathbf{j} додаються поляризаційні заряди та струми

$$\rho_n = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (1.61)$$

і струми намагнічення

$$\mathbf{j}_\mu = \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad (1.62)$$

а вільні заряди створюють струми провідності $\mathbf{j}_{np}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Вектор поляризації середовища $\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ вводиться як питомий електричний момент середовища, а вектор $\mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ намагніченості — як питомий магнітний дипольний момент середовища. Ці дві величини, а також $\mathbf{j}_{np}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, можна обчислити, задавши певну модель середовища за умов:

$$a \ll \lambda, |\mathbf{E}| \ll |\mathbf{E}_{am}|, \quad (1.63)$$

де a — середня відстань між атомами середовища, λ — довжина електромагнітних хвиль, \mathbf{E}_{am} — середня напруженість електричного поля в атомі.

Для опису електромагнітного поля в середовищі вводиться електрична індукція \mathbf{D} і напруженість магнітного поля \mathbf{H}

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H})) \quad (1.64)$$

і тоді рівняння Максвелла набувають вигляду (для ізоляторів):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{зов}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{зов}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

де $\rho_{зов}$, $\mathbf{j}_{зов}$ — густина зарядів і струмів, зовнішніх щодо до середовища. Для лінійних середовищ

$$P_i(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \varepsilon_0 \alpha_{ij} E_j, \quad M_i(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \varkappa_{ij} H_j, \quad j_{npi}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \sigma_{ik} E_k, \quad (1.66)$$

де α_{ij} , \varkappa_{ij} , σ_{ik} — тензори діелектричної та магнітної сприйнятливостей, а також провідності відповідно. Для ізотропних середовищ вони стають скалярами, і тоді $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, де $\varepsilon = 1 + \alpha$ та $\mu = 1 + \varkappa$ — діелектрична і магнітна проникності.

Рівняння електро- та магнітостатики мають вигляд

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{cm}, \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{cm}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \end{cases} \quad (1.67)$$

і стають подібними до (1.7) у лінійних ізотропних середовищах зі сталими ε і μ . Окрім ρ_{cm} і \mathbf{j}_{cm} можуть задаватися заряди або потенціали на певних площинах, тобто рівняння Пуассона

$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{cm}}{\epsilon_0\epsilon}$ буде мати граничні умови:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}\in S} &= \varphi_s(\mathbf{r}_s) \quad (\text{I гранична умова}) \\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n}\Big|_{\mathbf{r}\in S} &= \rho_s(\mathbf{r}_s) \quad (\text{II гранична умова})\end{aligned}\quad (1.68)$$

(відповідно, умови Діріхле та Неймана). Розв'язок першої граничної задачі (задачі Діріхле) і другої граничної задачі (задачі Неймана) знаходимо за допомогою функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \int_V \rho_{cm}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \\ &+ \iint_S \frac{1}{4\pi} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\varphi}{\partial n}(\mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS.\end{aligned}\quad (1.69)$$

Задача Діріхле для функції Гріна:

$$\Delta'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = 0 \quad (1.70)$$

розв'язується методами відокремлення змінних, дзеркальних відображень, перетворення Фур'є або чисельно. Функція Гріна в цьому випадку описує потенціал одиничного точкового заряду для заземлених провідників.

На межі розділення двох діелектриків мають виконуватись такі умови неперервності полів:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \sigma_{нов}, \quad [\mathbf{n}, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \\ \mathbf{n}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \quad [\mathbf{n}, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \mathbf{i}_{нов},\end{aligned}\quad (1.71)$$

де \mathbf{n} — вектор нормалі до межі розділення, $\sigma_{нов}$, $\mathbf{i}_{нов}$ — густина поверхневих зарядів і струмів, зовнішніх щодо середовищ.

Поширення електромагнітних хвиль у суцільних середовищах визначається їх будовою, яка обумовлює залежність від частоти і координат тензора діелектричної проникності $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$, а також граничними умовами для полів.

У випадку $|\mathbf{j}| \gg \frac{\partial D}{\partial t}$ можна застосувати квазістаціонарне наближення для магнітного поля. Ця умова виконується для провідників і тому рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.\end{aligned}\quad (1.72)$$

У цьому наближенні поле в провідниках описується правилами Кірхгофа:

- 1) сума всіх струмів у будь-якому вузлі дорівнює нулю;
- 2) сума падінь напруги на всіх елементах замкненого контуру дорівнює сумі всіх е.р.с. цього контуру.

Енергія квазістаціонарного магнітного поля

$$W_m = \frac{1}{2} L_{ik} I_i I_k, \quad (1.73)$$

де

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_k} \iint_V \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}') \mathbf{j}_k(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dV' dV'', \quad (1.74)$$

при $i \neq k$ називаються коефіцієнтами взаємоіндукції, а при $i = k$ — коефіцієнтами самоіндукції: I_i — струм в i -му контурі.

Енергія квазістаціонарного електричного поля

$$W_l = \frac{1}{2} C_{ij} \varphi_i \varphi_j, \quad \text{де} \quad C_{ij} = \iint \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial n_i \partial n_j} dS_i dS_j, \quad (1.75)$$

а $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функція Гріна для даної системи провідників. При $i \neq j$ величини C_{ij} називаються коефіцієнтами електростатичної індукції, а при $i = j$ — коефіцієнтами ємності.

Рівняння магнітної гідродинаміки мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \xi \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (1.76)$$

де ρ , \mathbf{v} — густина і швидкість рідини, p — тиск, ν , ξ — коефіцієнти в'язкості, σ — провідність рідини. При цьому для густини струму та електричного поля справедливо

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + [\mathbf{B}, \mathbf{v}]. \quad (1.77)$$

Якщо температура не є сталою, систему (1.76) потрібно доповнити рівнянням стану речовини і рівнянням, яке описує закон зміни температури.

Частина II

Задачі

§ 1. Векторний аналіз

1. Записати як результат дії оператора ∇ (набла) такі оператори: а) $\text{grad } f(\mathbf{r})$; б) $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r})$; в) $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Обчислити: г) $\text{grad } r$; д) $\text{div } \mathbf{r}$; є) $\text{rot } \mathbf{r}$, де $r = |\mathbf{r}|$. Що можна сказати про “напрямок” вектора набла?

2. Обчислити вказані в задачі 1 а), б) та в) похідні, якщо функції залежать від $r = |\mathbf{r}|$.

3. Використовуючи властивості оператора набла, знайти похідні першого порядку: а) $\text{grad } (f\varphi)$; б) $\text{div } (\mathbf{A}\varphi)$; в) $\text{rot } (\mathbf{A}\varphi)$; г) $\text{div } [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$; д) $\text{rot } [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$; є) $\text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, якщо φ , f , \mathbf{A} і \mathbf{B} — функції від \mathbf{r} .

4. Розв'язати задачу 3, якщо φ , f , \mathbf{A} і \mathbf{B} — функції від $r = |\mathbf{r}|$.

5. Обчислити вирази:

а) $\text{grad } (r^\alpha)$, $\text{grad } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, $\text{grad } ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})/r^3)$, $\text{grad } e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\text{grad } (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}/r)$;

б) $\text{div } (\mathbf{r}\varphi(r))$, $\text{div } (\mathbf{a}r^\alpha)$, $\text{div } \mathbf{n}$, $\text{div } (\mathbf{r}/r^\alpha)$, $\text{div } [\mathbf{a}, \mathbf{r}]$,

$\text{div } [\mathbf{a}, \mathbf{r}/r^\alpha]$, $\text{div } (\mathbf{a}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})$, $\text{div } (\mathbf{a}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}/r)$;

в) $\text{rot } (\mathbf{r}\varphi(r))$, $\text{rot } (\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r}))$, $\text{rot } [\mathbf{a}, \mathbf{r}/r^3]$, $\text{rot } \mathbf{a}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\text{rot } (\mathbf{a}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}/r)$;

г) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, $[\mathbf{a}, \nabla] \cdot \mathbf{r}$, $[[\mathbf{a}, \nabla], \mathbf{r}]$, $\frac{1}{2} (\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}))$,

де сталими є всі величини крім \mathbf{r} , $r = |\mathbf{r}|$ і $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. Вважати, що $r \neq 0$.

6. Використовуючи властивості оператора набла, встановити зв'язок між похідними другого порядку: а) $\text{div grad } \varphi$; б) $\text{div rot } \mathbf{A}$; в) $\text{rot rot } \mathbf{A}$; г) $\text{rot grad } \varphi$; д) $\text{grad div } \mathbf{A}$; є) $\Delta \mathbf{A}$; ж) $\Delta \varphi$, де φ і \mathbf{A} — функції від \mathbf{r} .

7. Розв'язати задачу 6, якщо φ і \mathbf{A} — функції від $r = |\mathbf{r}|$ і $r \neq 0$.

8. Виразити похідні добутків через похідні від окремих множників (вивести правило диференціювання добутків): а) $\Delta(\varphi f)$; б) $\Delta(\mathbf{A}\varphi)$, якщо функції φ , f і \mathbf{A} залежать від \mathbf{r} .

9. Розв'язати задачу 6 для функцій, залежних від $|\mathbf{r}|$, якщо $\mathbf{r} \neq 0$.

10. Обчислити вказані похідні, якщо $r \neq 0$: а) $\Delta(1/r)$; б) Δr^α ; в) $\Delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$; г) $\Delta(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/r)$; д) $\Delta \mathbf{n}$ (тут $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$); де змінні \mathbf{r} і r , а решта величин — сталі, $i = \sqrt{-1}$, причому $r \neq 0$.

11. Перетворити, використовуючи теорему Гаусса – Остроградського:

$$\begin{aligned} \text{а) } \oint_S \varphi \mathbf{n} dS; & \quad \text{б) } \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS; & \quad \text{в) } \oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{n}] dS; \\ \text{г) } \oint_S \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS; & \quad \text{д) } \oint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \varphi dS; & \quad \text{є) } \oint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{A} dS, \end{aligned}$$

де φ і \mathbf{A} неперервні разом із своїми похідними функції від \mathbf{r} належить $V(S) \cup S$, V — об'єм, обмежений поверхнею S , а вектор \mathbf{n} позначає нормаль до поверхні S .

12. Використовуючи результати задачі 5, г) і теорему Гаусса – Остроградського перетворити інтеграли: а) $I = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$, розглянути випадок, коли $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$, а на поверхні S має місце умова $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$; б) $I = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) dV$.

13. Використовуючи теорему Гаусса – Остроградського обчислити такі похідні:

а) $\operatorname{grad}(1/r)$; б) $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3)$; в) $\Delta(1/r)$; г) $\operatorname{div} \mathbf{n}$; д) $\operatorname{grad}((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})/r^3)$; є) $\Delta(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/r)$; ж) $\Delta(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$, якщо \mathbf{r} може набувати значення $\mathbf{r} = 0$, а в прикладі ж) вважати, що $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$.

14. Знайти дивергенцію вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\operatorname{div}' \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$.

15. Використовуючи теорему Стокса, перетворити вирази:

а) $\oint_L \varphi \boldsymbol{\tau} dl$; б) $\oint_L [\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau}] dl$; в) $\oint_L (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) dl$; г) $\oint_L (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{A} dl$, де функції φ та \mathbf{A} диференційовні на поверхні S , обмеженій контуром L .

16. Записати вираз $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ через компоненти векторів \mathbf{r} і \mathbf{r}' у

таких системах координат: а) декартовій; б) циліндричній; в) сферичній.

17. Виразити через орти декартової системи координат: а) орти e_r, e_θ, e_φ сферичної системи координат; б) орти e_r, e_φ, e_z циліндричної системи координат.

18. Розкласти в ряд Тейлора за степенями частки (r'/r) вираз $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, позначивши кут між векторами через α . Знайти явний вигляд чотирьох поліномів Лежандра. Використавши результат задачі 16 і формулу для поліномів від тілесного кута, записати відповідь через кути $\varphi, \varphi', \theta$ та θ' .

19. Виразити через поліноми Лежандра такі функції: а) $\cos \theta$; б) $\sin \theta$; в) $\cos^2 \theta$; г) $\sin \theta \cos \theta$; д) $\sin^4 \theta$; е) $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$.

20. Знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta \varphi = 0$, якщо функція φ залежить від змінної: а) x у декартовій системі координат; б) ρ у циліндричній системі координат; в) r у сферичній системі координат.

§ 2. Експериментальні закони електродинаміки

21. Яка мінімальна кількість електричних зарядів необхідна для встановлення закону Кулона і чому?

22. Записати теорему Гаусса у випадках, коли: а) заряд знаходиться всередині поверхні S ; б) заряд знаходиться на гладкій поверхні S ; в) заряд знаходиться на вершині конічної поверхні S з кутом α при вершині; г) заряд знаходиться зовні S .

23. Чому закон Біо–Савара–Лапласа у формі

$$d\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{[d\mathbf{l}_2, [\mathbf{r}_{12}, d\mathbf{l}_1]]}{r_{12}^3},$$

де $d\mathbf{F}_1$ — сила, що діє на елемент $d\mathbf{l}_1$ першого контуру з боку всього другого контуру, $I_{1,2}$ — струм невірний? Яка сила тут не врахована?

24. Чому система восьми диференціальних рівнянь Максвелла для шести функцій є сумісною?

25. Розв'язки яких рівнянь Максвелла — інтегральних чи диференціальних — є більш широким класом функцій?

26. Записати гіпотетичні “рівняння Максвелла” у випадку існування магнітних зарядів. Дослідити систему на сумісність.

27. Використовуючи перетворення Фур’є у вигляді

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{F}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\omega d\mathbf{k},$$

отримати фур’є-образ диференціальних рівнянь Максвелла. Розв’язати одержані рівняння відносно $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ і $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$.

28. Отримати неоднорідні хвильові рівняння для електричного і магнітних полів. Знайти їх фур’є-образи.

§ 3. Електростатика

29. Знайти напруженість електричного поля всередині і зовні кулі радіуса R з об’ємною густиною заряду $\rho(\mathbf{r})$. Розглянути випадки: а) $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$; б) $\rho(\mathbf{r}) = \alpha r^n$, $n > -3$; в) $\rho(\mathbf{r}) = 2\pi\alpha\rho_0 r/R$; г) $\rho(\mathbf{r}) = \sigma_0\delta(r - R)$.

30. У рівномірно зарядженій кулі радіуса R з густиною заряду ρ_0 є сферична порожнина радіуса R_1 . Знайти напруженість електричного поля в усіх точках простору, якщо відстань між центрами кулі й порожнини дорівнює a , де $a < R - R_1$.

31. Розв’язати задачу 29, якщо замість кулі дано нескінченний циліндр, а замість об’ємної густини заряду — погонна.

32. Знайти напруженість електричного поля всередині і зовні плоского шару товщиною d з густиною заряду $\rho(z)$. Розглянути такі випадки: а) $\rho(z) = \rho_0$; б) $\rho(z) = \alpha z^n$ при $n > -1$; в) $\rho(z) = \sigma_0\delta(|z| - d/2)$.

33. Знайти потенціал, створений зарядом, який розподілений у безмежному середовищі за законом $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \sin ax \sin by \sin cz$, де ρ_0 , a , b та c — сталі.

34. Виразити потенціал сферично симетричного заряду густиною $\rho(r)$ у вигляді однократного інтеграла. Знайти вираз для поля. Розглянути випадок $\rho(r) = \rho_0$ при $r < R$, $\rho(r) = 0$ при $r > R$.

35. Знайти потенціал електрона в основному стані атома водню. Вважати електрон неточковою частинкою, яка заповнює безмежний простір з густиною заряду $\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, де константа $a = 0.5 \cdot 10^{-10}$ м, а $(-e)$ — заряд електрона.

36. Методом відокремлення змінних розв’язати рівняння Лапласа в таких системах координат: а) декартова; б) циліндрична;

в) сферична. У розв'язку б) зробити перехід до осьової симетрії, а в розв'язку в) — спочатку до осьової, а потім до сферичної.

37. Розкласти в ряд за мультиполями потенціал зовні системи зарядів з густиною $\rho(\mathbf{r})$. Розглянути переходи до осьової і сферичної симетрії.

38. Використовуючи розклад за мультиполями, знайти потенціал поля, яке створене такою системою зарядів:

а) сферою радіуса R з поверхневим зарядом $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$;

б) електроном атома водню у збудженому стані з густиною заряду $\rho(\mathbf{r}) = -\frac{er^4}{3^8\pi a^7} e^{-2r/3a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ (інтеграл за V не обчислювати);

в) сферою радіуса R з поверхневим зарядом $\sigma = \sigma_0$ при $\theta > \theta_0$ і $r = 0$ при $\theta \leq \theta_0$.

39. Знайти потенціал усередині прямокутного паралелепіпеда з розмірами $A_1 \times A_2 \times A_3$, якщо:

а) грань $z = A_3$ має потенціал V , а решта — нуль;

б) дві грані $z = 0$ і $z = A_3$ мають потенціали V_1 і V_2 , а решта — нуль.

40. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле для півпростору $z > 0$ і, використовуючи її, обчислити потенціал, густину наведеного заряду і заряд в таких системах:

а) точковий заряд і заземлена провідна площина;

б) точковий заряд і провідна площина з потенціалом V .

41. Знайти функцію Гріна внутрішньої задачі Діріхле для сфери радіуса R і, використавши її, обчислити потенціал, густину заряду, наведений заряд таких систем:

а) точковий заряд на відстані $d < R$ від центра провідної заземленої сфери;

б) точковий заряд на відстані $d < R$ від центра провідної сфери з потенціалом V ;

в) точковий диполь на відстані $d < R$ від центра провідної заземленої сфери (густина заряду $\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})$).

42. Знайти функцію Гріна зовнішньої задачі Діріхле для сфери радіуса R і, використавши її, обчислити потенціал точкового заряду q на відстані $d > R$ від центра провідної сфери з потенціалом V .

43. Розв'язати задачу 42 за допомогою розкладу потенціалу за мультиполями у сферичній системі координат. Знайти густину індукованого заряду та його величину.

44. Провідна заземлена сфера знаходиться в зовнішньому однорідному полі \mathbf{E}_0 . Знайти потенціал, густину заряду і заряд в усіх

точках простору.

45. Провідна сфера знаходиться в зовнішньому неоднорідному полі. Знайти потенціал поблизу сфери.

46. Методом дзеркальних відображень знайти функцію Гріна задачі Діріхле з граничними умовами на таких поверхнях:

- а) провідна заземлена площина;
- б) двограний прямий провідний заземлений кут;
- в) дві заземлені провідні паралельні площини;
- г) провідна заземлена сфера радіуса R ;
- д) провідна заземлена площина, на якій видавлений виступ у вигляді півсфери радіуса R ;
- є) дві концентричні заземлені сфери з радіусами R_1 і R_2 .

47. Обчислити вказані мультипольні моменти таких систем зарядів:

- а) дипольний момент сфери з густиною заряду $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$;
- б) дипольний момент системи, якщо $\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})$, де \mathbf{p} — сталий вектор;
- в) квадрупольний момент системи, якщо

$$\rho(\mathbf{r}) = A_{\alpha\beta} \left(3 \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \delta_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta(\mathbf{r}) \right),$$

де $A_{\alpha\beta}$ — сталий тензор;

г) квадрупольний момент еліпсоїда $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ з густиною заряду $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$. Початок координат помістити в центрі. Знайти також заряд;

д) квадрупольний момент атома водню у збудженому стані, якщо

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{er^4}{4 \cdot 3^8 \pi a^7} e^{-2r/(3a)} \sin^4 \theta.$$

48. Знайти густину заряду, який створює потенціал:

а) $\varphi(\mathbf{r}) = a(3R - 2r)r \cos \theta$ при $r \leq R$, $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{aR^3}{r^2} \cos \vartheta$ при $r \geq R$,

де a та R — сталі величини;

б) $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r}$, де q та α — сталі;

в) $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right) e^{-2r/a}$, де q та a — сталі.

49. Вважаючи заряд точковим, знайти рівняння, якому задовольняє потенціал $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qe^{-r/a}}{4\pi\epsilon_0 r}$, де q та a — сталі.

50. Обчислити енергію W взаємодії електронної хмари атома водню з точковим протоном, якщо густина заряду електрона:

а) $\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$; б) $\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/(3a)} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$.

51. Знайти енергію U електростатичного поля в таких системах:

а) куля радіуса R зі сталою густиною заряду ρ_0 ;

б) сфера радіуса R зі сталою густиною поверхневого заряду σ_0 .

52. Знайти силу \mathbf{F} і момент сил \mathbf{N} , які прикладені до диполя \mathbf{p} у полі точкового заряду.

53. Заряд з об'ємною густиною $\rho(\mathbf{r})$ займає скінченну область простору. Вважаючи, що зовнішнє поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ мало змінюється в межах цієї області, знайти вираз для сили \mathbf{F} і моменту \mathbf{N} , що діють на заряджену систему, якщо її заряд Q , дипольний момент \mathbf{P} і тензор квадрупольного моменту $D_{\alpha\beta}$.

54. Знайти потенціал і електричне поле точкового заряду в діелектрику, якщо $\epsilon = \epsilon_1$ при $z > 0$ і $\epsilon = \epsilon_2$ при $z < 0$, а заряд знаходиться в області $z > 0$. Дослідити густина поверхневого поляризаційного заряду при $\epsilon \rightarrow \infty$.

55. Знайти потенціал і напруженість електричного поля, створеного кулею радіуса R з однорідною поляризацією \mathbf{P}_0 .

56. Діелектрична куля знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі \mathbf{E}_0 . Знайти потенціал і електричне поле в усіх точках простору, якщо діелектричні сталі в кулі та середовищі дорівнюють ϵ_1 і ϵ_2 відповідно.

57. Розв'язати задачу 56, якщо поле створене точковим зарядом q , розташованим зовні кулі.

58. Знайти потенціал поля, створеного точковим зарядом e і однорідною діелектричною пластинкою товщиною a , яка розташована на відстані d від заряду. Розглянути випадок $d = 0$, $a \rightarrow \infty$.

59. Центр провідної сфери радіуса R розташований на плоскій межі двох діелектриків. Знайти потенціал системи, вектор електричної індукції та густина поверхневого заряду на сфері, якщо її повний заряд q .

60. Якщо сфера не заряджена, то вона занурюється в рідину менше ніж на половину. Який заряд треба нанести на її поверхню, щоб вона занурилась наполовину? Маса сфери M , радіус R , густина рідини μ , діелектрична проникність ϵ .

61. Знайти потенціал точкового заряду всередині анізотропного діелектрика.

62. Знайти напруженість електричного поля всередині анізот-

ропної діелектричної пластинки, внесеної в однорідне поле \mathbf{E}_0 .

63. Знайти потенціал φ і напруженість \mathbf{E} електричного поля всередині і зовні діелектричної кулі, яку помістили в зовнішнє однорідне електричне поле \mathbf{E}_0 , якщо її діелектрична проникність задається тензором $\hat{\epsilon} = \epsilon_1(1 - \lambda \mathbf{E} \otimes \mathbf{E})$, де ϵ_1 і λ — константи, а діелектрична проникність навколишнього середовища ϵ_2 — стала величина. Вважати, що завжди має місце умова $\lambda E^2 \ll 1$.

64. Знайти розподіл заряду на відокремленому провіднику у формі стисненого сфероїда.

65. Знайти поле всередині та зовні однорідного діелектрика у формі сфероїда, внесеного в однорідне електростатичне поле. Знайти також дипольний момент діелектричного сфероїда.

66. Знайти поле у сфероїдальній порожнині всередині однорідного діелектрика, вважаючи, що діелектрик поляризований у віддаленій від порожнини області однорідно.

67. Знайти ємність таких конденсаторів: а) сферичного; б) циліндричного; в) циліндричного, якщо простір між його обкладками заповнений діелектриком з проникністю ϵ_1 .

68. Два довгі паралельні циліндричні провідники з радіусами R_1 і R_2 перебувають на відстані $d \gg \max(R_1, R_2)$. Знайти ємність одиниці довжини цієї системи.

69. Коефіцієнти ємності двох провідників $C_{11}, C_{12} = C_{21}, C_{22}$. Знайти ємність конденсатора, обкладками якого є ці провідники.

§ 4. Магнітостатика.

Квазістаціонарне наближення

70. Показати, що стале однорідне магнітне поле \mathbf{B}_0 можна описати вектор-потенціалом $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}]$.

71. Знайти індукцію магнітного поля, створеного струмом з густиною $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ у циліндричному провіднику радіуса R . Розглянути такі випадки: а) $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = k j_0$; б) $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = k \alpha r^k$; в) $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = k \alpha \cos(2\pi a r / R)$, де j_0, α, a — сталі величини. В області $r > R$ виразити поле через струм.

72. Знайти індукцію й векторний потенціал магнітного поля, створеного сталим струмом $k j_0$ у циліндричному провіднику радіуса R з циліндричною порожниною радіуса a . Вісь порожнини віддалена від осі циліндра на d , причому $d + a < R$.

73. Знайти індукцію магнітного поля, створеного поверхневим струмом з однорідною густиною \mathbf{i} , сталою в кожній точці площини.

74. Знайти індукцію магнітного поля, створеного однорідними поверхневими струмами з густинами \mathbf{i}_1 та \mathbf{i}_2 у паралельних площинах, віддалених на відстані d одна від одної. Розглянути частинні випадки: а) $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$, б) $\mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2$.

75. Знайти індукцію магнітного поля, створеного однорідним поверхневим струмом з густиною \mathbf{i}_0 у прямолінійній смужці з шириною a . Розглянути випадок $a \rightarrow \infty$.

76. Знайти вектор-потенціал магнітного поля, створеного протилежно напрямленими струмами величиною I у двох паралельних проводах, відстань між якими d .

77. Знайти вектор-потенціал магнітного поля, створеного струмом I , який тече по кільцю радіуса R . Розглянути випадок $\mathbf{r} = kz$.

78. Знайти вектор-потенціал та індукцію магнітного поля, створеного внаслідок обертання рівномірно зарядженої сфери. Радіус сфери R , заряд Q , кутова швидкість обертання ω .

79. Знайти магнітний момент і гіромагнітне відношення для рівномірно зарядженої кулі, яка обертається з кутовою швидкістю Ω . Радіус кулі R , заряд e , маса m .

80. Знайти магнітний момент струму, який виникає при орбітальному русі електрона у збудженому атомі водню, якщо:

а) $j_r = j_\theta = 0$, $j_\phi = \frac{e\hbar r^3}{3^8 \pi m a^7} \sin \theta \cos^2 \theta e^{-2r/3a}$, де \hbar — стала Планка, e — заряд електрона, $a \simeq 0.5 \cdot 10^{-10}$ м, m — маса електрона;

б) $j_r = j_\theta = 0$, $j_\phi = \frac{e\hbar r}{2^6 \pi m a^5} \sin \theta e^{-r/a}$;

в) $j_r = j_\theta = 0$, $j_\phi = \frac{e\hbar r^3}{2 \cdot 3^8 \pi m a^7} \sin^3 \theta e^{-2r/3a}$.

81. Обчислити магнітний момент для струму з густиною

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -[\mathbf{a}, \nabla] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

де \mathbf{a} та \mathbf{r}_0 — сталі вектори.

82. Довести, що магнітний момент струму з густиною $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ не залежить від вибору початку координат, якщо його величина скінченна.

83. Обчислити силу взаємодії двох прямих проводів зі струмами I_1 та I_2 . Відстань між проводами d , кут $\alpha \neq 0$.

84. Обчислити силу взаємодії двох коаксіальних кільцевих стру-

мів I_1 та I_2 , якщо відстань між їх площинами d , радіуси кілець R_1 та R_2 .

85. Знайти енергію взаємодії магнітного моменту протона μ_p з орбітальним моментом збудженого атома водню, якщо

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\phi = \frac{e\hbar r}{26\pi m a^5} \sin\theta e^{-r/a}$$

(спін-орбітальна взаємодія).

86. Знайти енергію взаємодії магнітного моменту протона μ_p зі спіновим струмом електрона, якщо його густина має вигляд

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi a^3} [\boldsymbol{\mu}_e, \nabla e^{-2r/a}],$$

де $\boldsymbol{\mu}_e = \mathbf{k} \frac{e\hbar}{2m}$ (спін-спінова взаємодія).

87. Знайти силу та момент сил, які діють на систему скінченних розмірів з густиною струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, яку помістили в однорідне магнітне поле з індукцією $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Вважати, що поле мало змінюється в межах системи. Дипольний момент системи $\boldsymbol{\mu}$.

88. Знайти індукцію магнітного поля, створеного нескінченним провідником зі струмом I , який знаходиться на відстані d від межі двох середовищ з магнітними проникностями μ_1 та μ_2 .

89. Знайти індукцію та напруженість магнітного поля, створеного кулею радіуса R з однорідною намагніченістю \mathbf{M}_0 .

90. Неферромагнітна куля вноситься в зовнішнє однорідне магнітне поле \mathbf{B}_0 . Знайти індукцію поля в усіх точках простору, якщо магнітні проникності кулі та середовища μ_1 і μ_2 .

91. Сферична оболонка з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$) розміщена в однорідному зовнішньому магнітному полі \mathbf{H}_0 . Знайти результуюче магнітне поле, якщо магнітна проникність матеріалу сфери μ , середовища μ_1 (при $r < R_1$) та μ_2 (при $r > R_1$).

92. Знайти коефіцієнт взаємної індукції двох паралельних кілець з радіусами R_1 та R_2 , якщо магнітна проникність речовини μ .

93. Знайти самоіндукцію одиниці довжини системи з двох коаксіальних циліндрів з радіусами R_1 та R_2 , якщо магнітна проникність речовини μ .

94. Знайти самоіндукцію одиниці довжини подвійного провода, якщо радіуси проводів R_1 та R_2 , відстань між ними d , $\mu = 1$, а струм рівномірно розподілений по перерізу проводів.

95. Знайти коефіцієнт самоіндукції одиниці довжини соленоїда радіуса R , якщо по ньому циркулює струм з поверхневою гу-

стиною $\mathbf{i} = e_\phi nI$, де n — кількість витків проводу на одиницю довжини, I — струм.

96. Знайти електричне та магнітне поля, густину струму всередині шару провідника товщиною d , по якому проходить змінний струм величиною $(I/L)e^{-i\omega t}$ на одиницю ширини. Провідність середовища σ , частота струму ω , магнітна проникність μ .

97. Знайти електричне та магнітне поля, густину струму всередині циліндричного проводу радіуса R , по якому проходить змінний струм величиною $Ie^{-i\omega t}$. Провідність середовища σ , частота струму ω .

98. Знайти магнітне поле всередині та зовні ізотропної провідної кулі радіуса R , яку помістили в зовнішнє однорідне періодичне магнітне поле з частотою ω . Провідність матеріалу кулі σ .

99. Знайти власні частоти двох індуктивно зв'язаних контурів з коефіцієнтами самоіндукції L_1 та L_2 , коефіцієнтом взаємної індукції L_{12} , ємностями C_1 та C_2 і активними опорами $R_1 = R_2 = 0$.

100. Знайти намагніченість, наведену у магнетик змінним магнітним полем \mathbf{h} з частотою ω , яке напрямлене перпендикулярно до однорідного стаціонарного поля \mathbf{H}_0 такого, що а) $H_0 \gg h$; б) наводить у магнетик сталу намагніченість \mathbf{M}_0 .

§ 5. Випромінювання та розсіювання електромагнітних хвиль

101. Знайти кутовий розподіл інтенсивності випромінювання лінійної антени довжиною d , в якій збуджується струм з густиною

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = e_z I_0 \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x)\delta(y)e^{-i\omega t}.$$

Орт e_z напрямлений уздовж антени, а на її довжині вкладається ціле число півхвиль. Побудувати діаграму направленості для n -півхвильових вібраторів при $n = 1, 2, 3, 4$.

102. Знайти середню за період інтенсивність випромінювання для лінійної антени, уздовж якої біжить хвиля лінійного струму $I(t) = I_0 \cos(\omega t - kz)$ від точки $z = -d/2$ до точки $z = d/2$, де вона повністю поглинається. Знайти опір випромінювання за формулою $R = 2W/I_0^2$.

103. Знайти електромагнітне поле, створене площиною $z = 0$, по якій тече поверхневий струм з густиною $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$.

104. Показати, що дипольне випромінювання при зіткненні двох однакових частинок відсутнє.

105. Знайти інтенсивність випромінювання точкової частинки маси m і заряду $-e$, яка рухається по коловій орбіті радіуса a під дією кулонівської сили, що створюється точковим ядром із зарядом e . Знайти час, за який частинка впаде на ядро (модель атома Резерфорда).

106. Знайти інтенсивність випромінювання точкової частинки маси m і заряду $-e$, яка рухається по коловій орбіті всередині рівномірно зарядженої області радіуса a і заряду $+e$. Знайти час, за який частинка зупиниться в центрі (модель атома Томсона).

107. Знайти інтенсивність та енергію дипольного випромінювання частинки з масою m і зарядом e , яка пролетіла через плоский конденсатор, перетнувши його пластини. Відстань між пластинами l , кут між полем \mathbf{E} і швидкістю частинки в момент влітання дорівнює α .

108. Знайти середню за період інтенсивність дипольного випромінювання двох зарядів e_1 та e_2 , які рухаються по еліптичній орбіті внаслідок своєї взаємодії. Розглянути граничний випадок колової орбіти.

109. Знайти інтенсивність випромінювання системи, яка складається з диполя \mathbf{p} , який знаходиться в початку координат і частинки з поляризованістю β у точці \mathbf{d} . Дипольний момент періодично змінюється за величиною з частотою ω , а відстань $d \ll \lambda$, де λ — довжина електромагнітної хвилі.

110. Знайти поле випромінювання диполя \mathbf{p} , який знаходиться на відстані d від межі розділення двох середовищ з діелектричними проникностями ϵ_1 та ϵ_2 . Дипольний момент періодично змінюється за величиною з частотою ω , а відстань $d \gg \lambda$, де λ — довжина електромагнітної хвилі.

111. Знайти інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання нейтрона з внутрішнім магнітним моментом μ_n , який рухається в постійному однорідному магнітному полі \mathbf{H} . Магнітний момент $\mu_n = -\beta \mathbf{L}$, де \mathbf{L} — внутрішній механічний момент, $\beta > 0$ — стала, кут між μ_n та \mathbf{H} рівний α .

112. Знайти середню за період інтенсивність випромінювання рівномірно зарядженої кулі, яка здійснює гармонічні крутильні коливання навколо своєї осі. Заряд кулі Q , радіус R , частота коливань ω_0 , амплітуда ψ_0 .

113. Знайти інтенсивність випромінювання рівномірно заряд-

женої кулі, яка рівномірно обертається навколо своєї осі в постійному однорідному магнітному полі \mathbf{H} . Заряд кулі Q , радіус R , маса m , кутова швидкість ω_0 , кут між ω_0 та \mathbf{H} рівний θ_0 .

114. Два однакових заряди величиною e рухаються по колу радіуса R з постійною кутовою швидкістю ω . При якій кутовій відстані ψ між ними інтенсивності дипольного та квадрупольного випромінювань будуть однаковими?

115. Точковий диполь рухається по колу радіуса R з постійною кутовою швидкістю ω так, що весь час залишається напрямленим до центра кола. Знайти інтенсивність дипольного, магнітно-дипольного і квадрупольного випромінювань, якщо $R \ll \lambda$, а вектор \mathbf{p} має сталу довжину.

116. Знайти спектральний розподіл енергії випромінювання, яке виникає при влітанні заряду e масою m у півпростір з однорідним електричним полем \mathbf{E} . Кут між початковою швидкістю \mathbf{v}_0 і полем \mathbf{E} рівний $\alpha < \pi/2$, а $v/c \ll 1$.

117. Знайти спектральний розподіл енергії випромінювання, яке виникає при лобовому зіткненні двох однойменних зарядів з масами m_1 та m_2 . Найменша відстань між зарядами d . Дослідити поведінку розв'язку при малих та великих частотах.

118. Розв'язати попередню задачу у випадку $e_1/m_1 = e_2/m_2$.

119. Знайти спектральний розподіл енергії випромінювання, яке супроводжує розпад ядра на два осколки з зарядами e_1 та e_2 і масами m_1 та m_2 такими, що $e_1/m_1 \neq e_2/m_2$. У момент розпаду осколки були нерухомі, а після розльоту на нескінченність їх енергія стала рівна E_0 .

120. Знайти поляризацію дипольного випромінювання заряду e , який рухається по колу радіуса R з постійною кутовою швидкістю ω .

121. Знайти поляризацію дипольного випромінювання, яке виникає внаслідок періодичного руху заряду e вздовж осі z за заданим законом $z(t) = R \cos \omega t$.

122. Знайти поляризацію когерентного дипольного випромінювання, яке виникає при русі електрона в полі лінійно поляризованої монохроматичної хвилі.

123. Знайти диференціальний і повний перерізи розсіяння лінійно поляризованої електромагнітної хвилі на гармонійному осциляторі з масою m і зарядом e . Врахувати силу радіаційного тертя; вважати, що довжина хвилі $\lambda \gg a$, де a — амплітуда осцилятора.

124. Знайти диференціальний і повний перерізи розсіяння лі-

нійно поляризованої монохроматичної хвилі з напруженістю магнітного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha)$ на вільному нейтроні з внутрішнім магнітним моментом $\boldsymbol{\mu}_n = -\beta \mathbf{L}$, де \mathbf{L} — внутрішній момент кількості руху, а $\beta > 0$ — стала.

125. Знайти напруженість електричного та магнітного полів розсіяної хвилі, яка виникає внаслідок падіння плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі на ідеально провідний циліндр радіуса R . Вісь циліндра паралельна вектору \mathbf{H} падаючої хвилі. Знайти потік енергії, розсіяної на одиниці довжини циліндра.

§ 6. Спеціальна теорія відносності. Релятивістська механіка та електродинаміка

126. Знайти матрицю поворотів у двовимірному псевдоевклідовому просторі з ортами \mathbf{e}_0 та \mathbf{e}_1 такими, що $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -1$ та $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.

127. Записати перетворення Лоренца для координат і часу, виходячи з таких припущень:

- а) перетворення лінійні та невірроджені;
- б) взаємно перетворюються час і координата, уздовж якої відбувається рух системи;
- в) обернене перетворення еквівалентне прямому з протилежною швидкістю;
- г) інверсія координати приводить до інверсії швидкості;
- д) частинка, нерухома у системі O' має швидкість \mathbf{v} у системі O ;
- є) швидкість світла стала в усіх системах.

128. Показати, що послідовні перетворення Лоренца в одному напрямку комутують і еквівалентні одному з відносною швидкістю.

129. Отримати перетворення Лоренца для координат і часу при довільній орієнтації вектора відносною швидкості.

130. Знайти зв'язок між напрямками швидкості частинки в системах, що рухаються з відносною швидкістю \mathbf{v} .

131. Отримати потенціали для заряду, який рівномірно рухається по прямій.

132. Скільки незалежних компонент існують у тензора k -го рангу в n -вимірному просторі, якщо тензор має такі властивості: а) загальні; б) симетричний за $s \leq k$ індексами; в) антисиметри-

чний за $a \leq k$ індексами; г) симетричний за s і антисиметричний за a індексами.

133. Розглядаючи тензор другого рангу як оператор у матричному просторі, знайти характеристичне рівняння, інваріанти та власні значення для тензора електромагнітного поля.

134. Знайти вираз для закону Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ у лабораторній системі, вважаючи провідність σ скалярною величиною. Розглянути випадок $v/c \ll 1$.

135. Кут між векторами \mathbf{B} та \mathbf{E} у нерухомій системі координат рівний α . З якою швидкістю і в якому напрямку повинна рухатись друга система координат, щоб кут між тими самими векторами дорівнював α' . Розглянути випадок $\alpha = 0$ і $\mathbf{v} \perp \mathbf{E}$.

136. Дзеркало рухається зі швидкістю v у напрямку, протилежному до своєї нормалі. Знайти закон відбивання світла в лабораторній системі координат.

137. Згідно з квантовою електродинамікою плоска монохроматична хвиля з частотою ω і хвильовим вектором \mathbf{k} розглядається як сукупність релятивістських частинок — фотонів з енергією $E = \hbar\omega$ і релятивістським імпульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}c$, де \hbar — стала Планка. Виходячи з такого способу опису, знайти:

а) залежність довжини хвилі фотона, розсіяного на нерухомому електроні, від кута (ефект Комптона);

б) частоту поглиненого (або випроміненого) фотона нерухомим електроном;

в) частоту γ -кванта, випроміненого нерухомим збудженим ядром маси M , якщо енергія збудження у власній системі координат ядра ΔE ;

г) порогову енергію реакції $\gamma + p \rightarrow p' + \pi$ взаємодії фотона з протоном, при якій утворюється π -мезон. Взяти реліктовий фотон з енергією $E_{ph} = 3.0 \cdot 10^{-4}$ еВ, що відповідає температурі $T \simeq 3$ К. Відомо, що маса спокою протона $m_p = 940$ МеВ, а маса спокою π -мезона $m_\pi = 140$ МеВ.

138. Знайти силу, з якою нерухоме ядро атома з зарядом Ze діє на рухомий нейтрон з магнітним моментом $\boldsymbol{\mu}_n$. Розглянути наближення порядку v/c .

139. Знайти енергію частинок у системі центра інерції, якщо вони мають маси m_1 та m_2 і утворилися внаслідок розпаду частинки з масою M . Виходячи з цього знайти кінетичну енергію μ -мезона та кінетичну енергію нейтрино, утворених після розпаду π -мезона. Відомо, що $m_\mu = 105.7$ МеВ, $m_\nu = 0$, $m_\pi = 139$ МеВ.

140. Знайти траєкторію руху заряду в однорідному магнітному полі з індукцією B_0 .

141. Розглянути рух релятивістського гармонічного осцилятора з масою m і власною частотою ω_0 .

142. Знайти траєкторію руху релятивістського точкового заряду e_1 з масою m у полі нерухомого точкового заряду e_2 .

143. Знайти траєкторію руху заряду в однорідному електричному полі з напруженістю E_0 . Розглянути випадки малих і великих швидкостей.

§ 7. Поширення електромагнітних хвиль.

Хвилеводи та резонатори.

Магнітна гідродинаміка

144. Середовище складається з не взаємодіючих анізотропних осциляторів з анізотропним лінійним тертям. Знайти тензор діелектричної проникності та тензор провідності цього середовища в постійному магнітному полі, якщо маса осцилятора m , заряд e , тензор пружних сталей k_{ij} , тензор тертя h_{ij} , концентрація осциляторів n . Розглянути такі випадки:

- ізотропні осцилятори без тертя і магнітного поля;
- плазма без магнітного поля;
- замагнічена плазма без затухання;
- замагнічена плазма із затуханням;
- ізотропні осцилятори із затуханням.

145. Знайти поворот площини поляризації лінійно поляризованої електромагнітної хвилі, яка пройшла відстань l у середовищі із замагнічених гармонічних осциляторів з концентрацією n . Хвильовий вектор електромагнітної хвилі паралельний до магнітного поля.

146. Знайти вектор поляризації середовища із не взаємодіючих ангармонічних осциляторів з потенціальною енергією

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + \frac{1}{3} \sum_{i,j,l} \beta_{ijl} x_i x_j x_l$$

в електромагнітному полі з частотою ω . Маса осцилятора m , заряд e , концентрація n . Компоненти тензора β_{ijk} вважати малими.

147. Розв'язати попередню задачу у випадку, коли середовище знаходиться в полі двох хвиль з частотами ω_1 та ω_2 .

148. Знайти тензор діелектричної проникності середовища із взаємодіючих осциляторів з власною частотою ω_0 . Осцилятори розміщені періодично в ланцюжках і взаємодіють за законом Гука з найближчими сусідами. Маса осцилятора m , заряд e , пружна стала міжмолекулярної взаємодії h , період ланцюжка a , концентрація осциляторів n . Розв'язати дисперсійне рівняння для електромагнітних хвиль у такому середовищі.

149. Знайти амплітуду хвиль, відбитих від плоскопаралельної пластинки і пропущених через неї. Товщина пластинки d , діелектрична проникність ϵ . Знайти умову найбільшого проходження хвиль через пластинку.

150. Знайти закон дисперсії поверхневої хвилі, яка поширюється вздовж плоскої межі двох діелектриків з проникностями ϵ_1 та $\epsilon_2 = -|\epsilon_2|$ так, що $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$.

151. Знайти закон дисперсії, граничну частоту та електромагнітне поле для TE та TM -хвиль у таких ідеальних хвилеводах:

- а) прямокутний зі стінками розмірами a і b ;
- б) циліндричний з радіусом R .

152. Розглянути електромагнітні хвилі в діелектричному стрижні з радіусом R і діелектричною проникністю ϵ .

153. Знайти електромагнітне поле і власні частоти в таких ідеальних резонаторах: а) прямокутний з розмірами стінок a , b та c ; б) циліндричний з радіусом R і довжиною d ; в) сферичний з радіусом R .

154. Знайти кількість коливань в інтервалі частот $\Delta\omega$, які існують у прямокутному ідеальному резонаторі при високих частотах ω .

155. Отримати рівняння магнітної гідродинаміки в наближенні малих відхилень середньої густини від стаціонарного значення ρ_0 , малих збурень магнітного поля та малих швидкостей руху \mathbf{v} . Вважати процес ізотермічним, а рідину ізобаричною, тобто $p = p(\rho)$.

156. Знайти закон поширення магніто-гідродинамічних хвиль, використовуючи наближення, отримані в задачі 155. Знайти їх фазову та групову швидкості залежно від орієнтації щодо зовнішнього поля \mathbf{B}_0 .

157. Іонізована плазма складається з електронів та іонів, які майже нерухомі при високих частотах коливань. Зважаючи на це і вважаючи відхилення густини електронів від стаціонарного значення малим, розглянути коливання електронної густини і знайти

їх частоту. Магнітним полем і тиском знехтувати.

158. В'язка нестислива провідна рідина рухається між двома паралельними площинами, перпендикулярними до однорідного стаціонарного зовнішнього магнітного поля \mathbf{B}_0 . Знайти стаціонарне поле швидкості рідини, густину струму, електричне та магнітне поля, якщо відстань між пластинами рівна $2d$, а рідина рухається за рахунок сталого градієнта тиску.

159. В'язка нестислива провідна рідина рухається між двома паралельними площинами перпендикулярно до схрещених під прямим кутом однорідних електричного та магнітного полів. Знайти поле швидкості рідини, густину струму і магнітне поле, якщо відстань між пластинами рівна $2d$, верхня площина рухається зі швидкістю v_0 , захоплюючи за собою рідину, а магнітне поле перпендикулярне до площин.

160. Знайти швидкість дрейфу ідеально провідної рідини в сталих електричному та магнітному полях, якщо вона перпендикулярна до магнітного поля. Струм вважати заданим.

Частина III

Вказівки та розв'язки

1. У декартових координатах $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, тому

а) $\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv \nabla \varphi$;

б) $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$;

в) $\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$;

г) $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$; д) 3; є) 0.

Виходячи з рівності $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ можна формально вважати, що вектори ∇ та \mathbf{r} — “паралельні”.

2. а) $\mathbf{n} \varphi'$; б) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}'$; в) $[\mathbf{n}, \mathbf{A}']$, де штрихом позначена похідна за r , а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

3. Підкреслюватимемо функцію, на яку діє оператор набла і дотримуватимемося правил множення векторів. Тоді:

а) $\text{grad } (\varphi f) = \nabla(\varphi f) = \nabla \underline{\varphi} f + \nabla \varphi \underline{f} = f \nabla \varphi + \varphi \nabla f =$
 $= f \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } f$;

б) $\varphi \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi$;

в) $\varphi \text{rot } \mathbf{A} - [\mathbf{A}, \text{grad } \varphi]$;

г) $\mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$;

д) $(\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B}$;

е) $[\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{A}] + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + [\mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{B}] + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}$, де

$$(\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (iB_x + jB_y + kB_z).$$

4. а) $\mathbf{n}(\varphi' f + f' \varphi)$; б) $\mathbf{n} \cdot (\varphi \mathbf{A}' + \varphi' \mathbf{A})$; в) $\varphi[\mathbf{n}, \mathbf{A}'] + \varphi'[\mathbf{n}, \mathbf{A}]$;
 г) $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{A}', \mathbf{B}] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{A}, \mathbf{B}']$; д) $[\mathbf{n}, [\mathbf{A}', \mathbf{B}]] + [\mathbf{n}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}']]$;

е) $\mathbf{n}(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{n}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}')$; де штрихом позначена похідна за r , а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

5. а) $\alpha r^{\alpha-1} \mathbf{n}$, \mathbf{a} , $(\mathbf{a} - 3\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}))/r^3$, $i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\frac{\mathbf{n}}{r}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (i\mathbf{k} - \frac{1}{r})$;

б) $3\varphi + r\varphi'$, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\alpha r^{\alpha-1}$, $2/r$, $(3 - \alpha)/r^\alpha$, 0 , 0 , $i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$,
 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} (i\mathbf{k} - \frac{1}{r})$;

в) 0 , $-[\mathbf{r}, \text{grad } \varphi(\mathbf{r})]$, $2\mathbf{a}$, $\frac{1}{r^3}(3\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{a}))$, $i[\mathbf{k}, \mathbf{a}]e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$,
 $\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}[\mathbf{n}, \mathbf{a}]}{r} (i\mathbf{k} - \frac{1}{r})$;

г) \mathbf{a} , 0 , $-2\mathbf{a}$, \mathbf{a} .

6. а) $\Delta \varphi$; б) 0 ; г) 0 ; е) $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$;

7. а) $\varphi'' + 2\varphi'/r$; в) $-\mathbf{A}'' + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}'') - \mathbf{A}'/r - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}')/r$;

д) $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}'') + \mathbf{A}'/r - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}')/r$; е) $\mathbf{A}'' + 2\mathbf{A}'/r$; штрихом позначена похідна за $r = |\mathbf{r}|$.

8. Враховуючи результати задач 3 та 6, отримаємо:

а) $f\Delta \varphi + 2\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi + \varphi\Delta f$;

б) $\mathbf{A}\Delta \varphi + 2(\text{grad } \varphi \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + \varphi\Delta \mathbf{A}$;

9. а) $\varphi'' f + 2(\varphi' f/r + \varphi' f' + f' \varphi/r) + f'' \varphi$;

б) $\mathbf{A}(\varphi'' + 2\varphi'/r) + 2\varphi' \mathbf{A}' + \varphi(\mathbf{A}'' + 2\mathbf{A}'/r)$.

10. а) 0 ; б) $\alpha(\alpha + 1)r^{\alpha-2}$; в) $-k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$; г) $-k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}/r$; д) $-2\mathbf{n}/r^2$.

11. а) $\int_V \text{grad } \varphi dV$; б) $\int_V \text{div } \mathbf{A} dV$; в) $\int_V \text{rot } \mathbf{A} dV$;

г) $\int_V (\mathbf{r} \text{div } \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{r}) dV$; д) $\int_V (\mathbf{r} \text{grad } \varphi + 3\varphi) dV$;

е) $\int_V ([\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{A}] + (\mathbf{r} \cdot \text{grad } \mathbf{A}) \mathbf{A}) dV$.

12. а) Маємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV = \int_V (\mathbf{j} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{r}} dV = \int_V \left((\nabla \cdot \underline{\mathbf{j}}) \underline{\mathbf{r}} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \underline{\mathbf{j}}) \right) dV = \\ &= \oint_S (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{j}}) \underline{\mathbf{r}} dS - \int_V \mathbf{r} \text{div } \underline{\mathbf{j}} dV, \end{aligned}$$

за вказаних умов $I = 0$;

б) аналогічно до попереднього:

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{M} dV &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{M} - \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{M} + \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})] dV = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_V ([\mathbf{r}, [\nabla, \mathbf{M}]] - [\mathbf{r}, [\nabla, \mathbf{M}]]) dV = \\
 &= -\oint_S [\mathbf{r}, [\mathbf{n}, \mathbf{M}]] dS + \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{M}] dV.
 \end{aligned}$$

13. Згідно з теоремою Гаусса – Остроградського

$$\oint_S f(\mathbf{r}) n_i dS = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_i} dV,$$

якщо функція $f(\mathbf{r})$ та її похідні неперервні скрізь у замкненому об'ємі V . Якщо в точці \mathbf{r}_0 ця умова порушена, то її можна оточити сферою S_ε малого радіуса ε і безпосередньо обчислити інтеграл. Якщо при граничному переході $\varepsilon \rightarrow 0$ результат не залежатиме від ε , то тоді також можна застосувати теорему Гаусса – Остроградського, включивши відмінний від нуля результат у праву частину формули за допомогою δ -функції Дірака.

а) формально $\oint_S \frac{\mathbf{n}}{r} dS = \int_V \text{grad } \frac{1}{r} dV$, але коли $\mathbf{r} = 0 \in V$, то

$$\begin{aligned}
 \oint_S \frac{\mathbf{n}}{r} dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\oint_S \frac{\mathbf{n}}{r} dS + \oint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{n}}{r} dS \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_V \text{grad } \frac{1}{r} dV + \oint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^2} dS \right] = \\
 &= - \int_V \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\mathbf{i} \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{j} \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta) \times \\
 &\times \varepsilon \sin \theta d\theta d\varphi = - \int_V \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV.
 \end{aligned}$$

Оскільки ліві частини виразів рівні, то рівні й праві, тому при будь-яких значеннях \mathbf{r} виконується $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$;

б) аналогічно а) маємо $\oint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV$, але коли $\mathbf{r} \in V$,

то

$$\oint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\oint_{S-S_\varepsilon} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS + \oint_{S_\varepsilon} \frac{dS}{r^2} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\varphi = 4\pi,$$

отже $\int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = 4\pi = \int_V 4\pi\delta(\mathbf{r}) dV$, де $\delta(\mathbf{r})$ — δ -функція Дірака,

тому $\operatorname{div} (\mathbf{r}/r^3) = \delta(\mathbf{r})$ при будь-яких \mathbf{r} ;

в) $\Delta \frac{1}{r} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi\delta(\mathbf{r});$

г) $\operatorname{grad} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{a} - 3\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})}{r^3} + 4\pi \frac{\mathbf{a}}{3} \delta(\mathbf{r});$ д) $\operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{2}{r};$

е) $\Delta \frac{e^{ikr}}{r} = e^{ikr} \Delta \frac{1}{r} + 2\nabla e^{ikr} \cdot \nabla \frac{1}{r} + e^{ikr} \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) - k^2 \frac{e^{ikr}}{r};$

ж) $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$

15. а) Домножимо інтеграл на сталий вектор \mathbf{a} , тоді

$$\oint_L \varphi(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) dl = \int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{a}\varphi) dS = \int_S \mathbf{n}[\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}] dS = \mathbf{a} \cdot \int_S [\mathbf{n}, \operatorname{grad} \varphi],$$

отже $\oint_L \varphi \boldsymbol{\tau} dl = \int_S [\mathbf{n}, \operatorname{grad} \varphi] dS$, де \mathbf{n} — нормаль до S ;

б) $\int_S (\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})) dS;$

в) $\int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dS;$

г) $\int_S ([[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \operatorname{rot} \mathbf{A}] + \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{r}, \mathbf{n}]))$, де підкреслені функції,

на які діє оператор похідної.

16. в) $(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2)^{1/2};$

г) $[r^2 + r'^2 + 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'))]^{1/2}$, величину $\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ називають косинусом сферичного кута.

17. Використовуємо означення орта $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$.

$$\begin{aligned} \text{а) } e_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta, \\ e_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{r \partial \theta} = \mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta, \\ e_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{r \sin \theta \partial \varphi} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi; \\ \text{б) } e_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ e_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r \varphi} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad e_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

18. Виділимо дріб r'/r :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha), \end{aligned}$$

де $P_l(x)$ — поліноми Лежандра, $P_l(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. Формула для поліномів Лежандра від $\cos \alpha$, де α — сферичний кут, має вигляд:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{m=-n}^n \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} P_n^{|m|}(\cos \theta) P_n^{|m|}(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi').$$

Очевидно, що при $r < r'$ розклад буде такий самий з точністю до взаємозаміни r та r' .

19. Використаємо явні вирази для поліномів Лежандра та приєднаних поліномів Лежандра.

$$\begin{aligned} \text{а) } P_1(\cos \theta); \text{ б) } P_1^1(\cos \theta); \text{ в) } \frac{1}{3}(2P_2(\cos \theta) + P_0(\cos \theta)); \\ \text{г) } \frac{1}{3}P_2^1(\cos \theta); \text{ д) } \frac{8}{35}P_4 - \frac{16}{21}P_2 + \frac{8}{15}P_0; \text{ е) } -\frac{8}{35}P_4 + \frac{2}{21}P_2 + \frac{2}{15}P_0. \end{aligned}$$

$$20. \text{ а) } ax + b; \text{ б) } a \ln r + b; \text{ в) } \frac{a}{r} + b.$$

21. 4.

$$22. \text{ а) } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}; \text{ б) } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{2\varepsilon_0};$$

$$\text{в) } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right); \quad \text{г) } \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

23. На елемент струму $d\mathbf{l}_1$ діє магнітне поле \mathbf{B} , створене обома струмами.

26. Відповідь:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\alpha \mathbf{j}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= \beta, & \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho_m}{\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

де ρ_m та \mathbf{j}_m — гіпотетична густина магнітного “заряду” та “струму”, α та β — сталі. Система рівнянь — сумісна, коли виконується

рівняння неперервності $\beta \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \alpha \text{div } \mathbf{j}_m = 0$.

27. Після перетворення Фур’є отримаємо:

$$\begin{aligned} i[\mathbf{k}, \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)] &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) - \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \\ [\mathbf{k}, \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] &= \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \end{aligned}$$

Домножимо перше й друге рівняння векторно на \mathbf{k} зліва. Після перетворень одержимо:

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = i\mu_0 \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)]}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{\mu_0 \omega \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k} \rho_0(\mathbf{k}, \omega) / \varepsilon_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

28. Обчислюючи операцію ротора від векторних рівнянь Максвелла, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad } \rho(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \\ \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Фур’є-образи рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) &= -\frac{i}{\varepsilon_0} \mathbf{k} \rho(\mathbf{k}, t) + i\mu_0 \omega \mathbf{j}(\mathbf{k}, t), \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) &= -\frac{i}{\mu_0} [\mathbf{k}, \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) + i\mu_0 \omega \mathbf{j}(\mathbf{k}, t)]. \end{aligned}$$

29. Використовуємо інтегральні рівняння та враховуємо сферичну симетрію.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad \text{при } r < R,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^3} \int_0^R \rho(R) r'^2 dr', \quad \text{при } R < r,$$

а) $\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{3\varepsilon_0}, \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3};$

б) $\mathbf{E}_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{r^n}{n+3} \mathbf{r}, \mathbf{E}_2 = \frac{\alpha R}{\varepsilon_0(n+3)} \frac{\mathbf{r}}{r^3};$

в) $\mathbf{E}_1 = \frac{r\rho_0}{\varepsilon_0 r^3} [-2 \sin \psi + \psi \cos \psi + \psi^2 + \sin \psi] \psi^3, \text{ де } \psi = \frac{2\pi\alpha r}{R};$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{r\rho_0}{\varepsilon_0 r^3} \left(\frac{R}{2\pi\alpha} \right)^3 [-2 \sin(2\pi\alpha) + 4\pi\alpha \cos(2\pi\alpha) + (2\pi\alpha)^2 \sin(\pi\alpha)];$$

г) $\mathbf{E}_1 = 0, \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}.$

30. Виходячи з принципу суперпозиції, шукаємо результуюче поле як суму поля суцільної кулі радіуса R з густиною заряду ρ_0 і центром у точці a . Тому:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_0 \mathbf{r} - \frac{\rho_0 R_1^3}{3\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}, \mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \notin V_1, \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 \mathbf{a}}{3\varepsilon_0}, \mathbf{r} \in V_1;$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}, \mathbf{r} \in V, \text{ де } V - \text{об'єм кулі } R, V_1 - \text{об'єм кулі } R_1.$$

31. $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r' dr' \text{ при } r < R,$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^2} \int_0^R \rho(r') r' dr' \text{ при } r > R;$$

а) $\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{2\varepsilon_0}, \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^2};$

б) $\mathbf{E}_1 = \frac{\alpha r^n \mathbf{r}}{\varepsilon_0(n+2)}, \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 R^{n+2} \mathbf{r}}{\varepsilon_0} (n+2)r^2;$

$$\text{в) } \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^2} (x \sin x + \cos x - 1) \left(\frac{R}{2\pi\alpha} \right), \quad x = \frac{2\pi\alpha r}{R},$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{\varepsilon_0} \left(\frac{R}{2\pi\alpha r} \right)^2 (2\pi\alpha \sin(2\pi\alpha) + \cos(2\pi\alpha) - 1);$$

$$\text{г) } \mathbf{E}_1 = 0, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma R \mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^2}.$$

32. Початок осі z помістимо всередині шару, тому

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0} \int_0^z \rho(z) dz;$$

$$\text{а) } \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{k}\rho_0 z}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{k}\rho\alpha}{2\varepsilon_0} \text{sign } z;$$

$$\text{б) } \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{k}\rho_0\alpha|z|^{n+1}}{\varepsilon_0(n+1)} \text{sign } z, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{k}\rho_0\alpha \text{sign } z}{\varepsilon_0(n+1)} \left(\frac{d}{2} \right)^{n+1};$$

$$\text{в) } \mathbf{E}_1 = 0, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \text{sign } z.$$

33. Розв'язуємо рівняння Пуассона та одержуємо

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 \sin ax \sin by \sin cz}{\varepsilon_0 (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

34. Рівняння Пуассона при сферичній симетрії

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

інтегруємо один раз, врахувавши, що $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}(0) = E_r(0) = 0$, а другий раз — що $\varphi(\infty) = 0$. Після перестановки порядку інтегрування одержуємо

$$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty r' \rho(r') dr',$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon_0 r^3} \int_0^r \varphi(r') r'^2 dr'$$

для $\rho(r) = \rho_0$, $\varphi(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$ при $r \leq R$, та $\varphi(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}$

при $r \geq R$.

35. Врахувавши розв'язок задачі 34, одержуємо

$$\varphi(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - e^{-2a/r}\right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-2a/r}.$$

36. а) згідно з методом відокремлення змінних покладемо

$$\varphi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z),$$

рівняння Лапласа набуває вигляду:

$$X''(x)YZ + XY''(y)Z + XYZ''(z) = 0.$$

Після ділення на $X(x)Y(y)Z(z)$ і перетворень, одержуємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = a.$$

Звідси $Z''(z) + aZ(z) = 0$, $Z(z) = C_{1a}e^{i\sqrt{a}z} + C_{2a}e^{-i\sqrt{a}z}$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = a - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -b.$$

Отже, $X(x) = C_{1b}e^{i\sqrt{b}x} + C_{2b}e^{-i\sqrt{b}x}$, $Y(y) = C_{1c}e^{\sqrt{c}y} + C_{2c}e^{-\sqrt{c}y}$, де $\sqrt{c} = \sqrt{a+b}$. Сталі величини a, b, C_{ia}, C_{ib} та C_{ic} визначаються з граничних умов і можуть набувати різних значень, тому загальний розв'язок буде сумою за всіма можливими значеннями сталих:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \sum_{a,b} \left(C_{1b}e^{i\sqrt{b}x} + C_{2b}e^{-i\sqrt{b}x} \right) \left(C_{1c}e^{\sqrt{c}y} + C_{2c}e^{-\sqrt{c}y} \right) \times \\ & \times \left(C_{1a}e^{i\sqrt{a}z} + C_{2a}e^{-i\sqrt{a}z} \right), \end{aligned}$$

де $\sqrt{c} = \sqrt{a+b}$. Користуючись зв'язком між a, b та c можна одержати й аналогічні форми розв'язку;

б) покладемо $\varphi(\mathbf{r}) = R(r)\Phi(\chi)Z(z)$, тоді рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{\Phi Z}{r} \frac{d}{dr} (rR'(r)) + \frac{RZ}{r^2} \frac{d^2\Phi(\chi)}{d\chi^2} + R\Phi Z''(z) = 0.$$

Після ділення на $R\Phi Z$ і перетворень:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} (rR'(r)) + \frac{1}{r^2\Phi} \Phi''(\chi) = \frac{Z''(z)}{Z} = -a, \quad (3.1)$$

звідси $Z(z) = C_{1a}e^{i\sqrt{a}z} + C_{2a}e^{-i\sqrt{a}z}$, після домноження лівої частини (3.1) на r^2 одержуємо:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} (rR'(r)) - ar^2 = -\frac{\Phi''(\chi)}{\Phi} = b.$$

Тепер $\Phi(\chi) = C_{1b}e^{i\sqrt{b}\chi} + C_{2b}e^{-i\sqrt{b}\chi}$. Оскільки $\Phi(\chi + 2\pi) = \Phi(\chi)$ (згідно з геометричним змістом кута χ), то $e^{2i\sqrt{b}\pi} = 1$ і звідси $\sqrt{b} = m$, де m — довільне ціле число. Отже, $\Phi(\chi) = C_{1m} \cos m\chi + C_{2m} \sin m\chi$, а для $R(r)$ одержуємо рівняння Бесселя: $r^2 R'' + rR' - (m^2 + ar^2)R = 0$. Його розв'язки:

$$R(r) = \tilde{C}_{1m} J_m(i\sqrt{a}r) + \tilde{C}_{2m} Y_m(i\sqrt{a}r),$$

де $J_m(x)$ та $Y_m(x)$ є функціями Бесселя першого та другого родів відповідно. Сталі величини a , m , C_{im} , \tilde{C}_{im} визначаються з граничних умов і можуть набувати різних значень, тому загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = \sum_{m,a} & \left(\tilde{C}_{1m} J_m(i\sqrt{a}r) + \tilde{C}_{2m} Y_m(i\sqrt{a}r) \right) \times \\ & \times (C_{1m} \cos m\chi + C_{2m} \sin m\chi) \left(C_{1a} e^{i\sqrt{a}z} + C_{2a} e^{-i\sqrt{a}z} \right); \end{aligned}$$

в) покладемо $\varphi(\mathbf{r}) = R(r)\Phi(\chi)T(\theta)$, тоді рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{\Phi T}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 R'(r)) + \frac{R\Phi}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T'(\theta)) + \frac{RT}{r^2 \sin^2 \theta} \Phi'(\chi) = 0.$$

Після ділення на $R\Phi T$ і після перетворень одержуємо:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R'(r)) = -\frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T'(\theta)) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi} = a.$$

Тепер перетворюємо друге рівняння

$$-\frac{\sin \theta}{T} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T'(\theta)) - a \sin^2 \theta = \frac{\Phi''(\chi)}{\Phi} = -b.$$

Звідси $\Phi(\chi) = C_{1b}e^{i\sqrt{b}\chi} + C_{2b}e^{-i\sqrt{b}\chi}$ і, враховуючи періодичність $\Phi(\chi + 2\pi) = \Phi(\chi)$, отримаємо: $\sqrt{b} = m$, де m — довільне ціле

число. Тоді для $T(\theta)$ має місце рівняння

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T'(\theta)) + (-m^2 + a \sin^2 \theta) T(\theta) = 0,$$

яке після введення нової змінної $x = \sin \theta$ зводиться до рівняння Лежандра для приєднаних поліномів:

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T'(\theta)) + (-m^2 + a \sin^2 \theta) T(\theta) = 0,$$

Його один розв'язок буде скінченним у інтервалі $[-1, 1]$, якщо тільки $a = l(l+1)$ і $m \in [-l, l]$, де l — натуральне число або нуль, а другий розв'язок завжди сингулярний. Отже, $T(\theta) = C_l P_l^{|m|}(\cos \theta)$.

Тепер рівняння для $R(r)$ набуває вигляду

$$\frac{d}{dr} (r^2 R'(r)) - l(l+1) R(r) = 0$$

і його розв'язок шукаємо у вигляді cr^α . Це дає:

$$R(r) = \frac{C_{1l}}{r^{l+1}} + C_{2l} r^l.$$

Сталі величини C_{1l} , C_l та C_{im} визначаються з граничних умов. Об'єднавши всі розв'язки згідно з принципом суперпозиції, одержуємо:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{C_{1l}}{r^{l+1}} + C_{2l} r^l \right) P_l^{|m|}(\cos \theta) (C_{1m} \cos m\chi + C_{2m} \sin m\chi).$$

Якщо нас цікавить потенціал зовні системи зарядів, де є безмежні значення r , то всі $C_{2l} = 0$, а якщо всередині системи, де є $r = 0$, то всі $C_{1l} = 0$.

У випадку осової симетрії немає залежності φ від χ . Цього легко досягти, поклавши $C_{1m} = \delta_{1m}$, $C_{2m} = 0$ у циліндричній і сферичній системах. Тоді матимемо:

$$\varphi_y(r, z) = \sum_a (\tilde{C}_1 J_0(i\sqrt{a}r) + \tilde{C}_2 Y_0(i\sqrt{a}r)) (C_{1a} e^{i\sqrt{a}z} + C_{2a} e^{-i\sqrt{a}z}),$$

$$\varphi_c(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_{1l}}{r^{l+1}} + C_{2l} r^l \right) C_l P_l(\cos \theta).$$

У випадку сферичної симетрії потенціал не залежатиме від кута θ .

Поклавши $C_{1l} = C_1 \delta_{0l}$ та $C_{2l} = C_2 \delta_{0l}$, матимемо

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

37. Розв'язок рівняння Пуассона має вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Використавши розв'язок задачі 18 одержуємо в області $r > \max_{r' \in V}(r')$

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \chi) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(r', \theta', \chi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(\cos \theta) \times \\ & \times P_l^{|m|}(\cos \theta') (\cos m\chi \cos m\chi' + \sin m\chi \sin m\chi') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\chi'. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Виконавши інтегрування за всім розподілом зарядів, одержуємо розклад потенціалу за мультиполями, який набуває вигляду

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \chi) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{1}{r^l} P_l^{|m|}(\cos \theta) \times \\ & \times (\cos m\chi \cos m\chi' + \sin m\chi \sin m\chi'), \end{aligned}$$

що з точністю до коефіцієнтів збігається з результатом задачі 36 в області $r > \max_{r' \in V}(r')$, де є безмежні r . Тут

$$C_{1lm} = \int \rho(r', \theta', \chi') r'^{2+l} P_l^{|m|}(\cos \theta') \sin \theta' \cos m\chi' dr' d\theta' d\chi',$$

$$C_{2lm} = \int \rho(r', \theta', \chi') r'^{2+l} P_l^{|m|}(\cos \theta') \sin \theta' \sin m\chi' dr' d\theta' d\chi'.$$

Якщо $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r', \theta')$, то відмінними від нуля в силу ортогональності $\cos m\chi$ та $\sin m\chi$ будуть тільки коефіцієнти C_{1l0} , а коли $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r')$, то завдяки ортогональності поліномів Лежандра тільки C_{100} не дорівнює нулю. Таким чином і рівняння Пуассона має розв'язки, які можна представити як розклад за базисом, породженим рівнянням Лапласа у відповідній системі координат. Очевидно, що в області $r < r'$ розклад буде таким самим з точністю до взаємозаміни r та r' .

38. а) враховуючи результат задачі 37 і ортогональність $P_l(\cos \theta)$,

шукаємо розв'язок при $r > R$ у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} P_1(\cos \theta) C_{110},$$

де

$$C_{110} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma_0 R^3 P_1(\cos \theta') \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\chi' = \frac{2\pi}{3} \sigma_0 R^3.$$

Отже

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta, \quad \text{при } r > R.$$

Розв'язок при $r < R$ шукаємо також за формулою (3.2) задачі 37 тільки r і r' міняємо місцями, тобто

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{r}{4\pi\epsilon_0} \tilde{C}_{110}$$

та

$$\tilde{C}_{110} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r}{r'^2} r'^2 \cos \theta' P_1(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' d\chi' = \frac{4\pi}{3} \sigma_0,$$

отже, $\varphi(r) = \frac{\sigma_0 r}{3\epsilon_0} \cos \theta$;

б) використовуючи результат задачі 19, є) представимо

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{er^4}{3^8 \pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \left[-\frac{8}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{2}{21} P_2(\cos \theta) + \frac{2}{15} P_0(\cos \theta) \right].$$

Отже, у розв'язку будуть присутні тільки доданки з $P_4(\cos \theta)$, $P_2(\cos \theta)$ та $P_0(\cos \theta)$. Заряд займає весь простір, тому в потенціалі будуть розв'язки для $r > r'$ та $r < r'$. Отже, згідно з задачею 19, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{C_{140}}{r^4} P_4(\cos \theta) + \frac{C_{120}}{r^2} P_2(\cos \theta) + C_{100} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\tilde{C}_{240} r^4 P_4(\cos \theta) + \tilde{C}_{220} r^2 P_2(\cos \theta) + \tilde{C}_{200} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де

$$C_{110} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r', \theta') r'^{2+l} P_l(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta' d\chi',$$

$$\tilde{C}_{2l0} = \int_r^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r', \theta') r'^{-(l+1)} P_l(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta' d\chi'.$$

Після елементарних перетворень одержуємо:

$$\begin{aligned} C_{140} &= \frac{3ea^4}{2^6 \cdot 5 \cdot 7} I_{10} \left(\frac{2r}{3a} \right), & C_{140} &= -\frac{ea^2}{2^6 \cdot 5 \cdot 7} I_8 \left(\frac{2r}{3a} \right), \\ C_{100} &= -\frac{e}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} I_6 \left(\frac{2r}{3a} \right), & \tilde{C}_{240} &= -\frac{2e}{3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^5} J_1 \left(\frac{2r}{3a} \right), \\ \tilde{C}_{220} &= -\frac{2e}{2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^3} J_3 \left(\frac{2r}{3a} \right), & \tilde{C}_{200} &= -\frac{2e}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot a} J_5 \left(\frac{2r}{3a} \right). \end{aligned}$$

де $I_n(x) = \int_0^x x^n e^{-x} dx$, $J_n(x) = \int_x^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Після обчислення інтегралів і підстановки в (3.3) одержимо явну залежність від r ;

в) запишемо густину заряду у вигляді

$$\rho(r, \theta) = \sigma_0 \delta(r - R) \eta(\theta - \theta_0),$$

де

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Тому всередині сфери, де $r < r'$:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} r^l \tilde{C}_{2l0} P_l(\cos \theta),$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{2l0} &= \int_r^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') \frac{1}{r'^{l-1}} P_l(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta' d\chi' = \\ &= \frac{2\pi}{(2l+1)R^{l-1}} P_{l-1}(\cos \theta_0) P_{l-1}(\cos \theta_0). \end{aligned}$$

Зовні сфери

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{1l0}}{r^l} P_l(\cos \theta),$$

де

$$\begin{aligned}
C_{110} &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') r'^{l+2} P_l(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta' d\chi' = \\
&= \sigma_0 R^{2+l} 2\pi \int_{\theta_0}^\pi P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' = R^{2l+1} \tilde{C}_{2l0}.
\end{aligned}$$

39. Розв'язуємо задачу методом відокремлення змінних. Тоді, згідно із задачею 38, а), розв'язок можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \sum_{a,b} (C_{1a} \sin \sqrt{ax} + C_{2a} \cos \sqrt{ax}) (C_{1b} \sin \sqrt{by} + C_{2b} \cos \sqrt{by}) \times \\
&\times (C_{1c} \sin \sqrt{cz} + C_{2c} \cos \sqrt{cz}).
\end{aligned}$$

а) сталі a, b, c, C_{ia}, C_{ib} та C_{ic} визначаємо з граничних умов. Спочатку однорідні граничні умови:

$$\begin{aligned}
\varphi(0, y, z) &= \sum_{a,b} C_{2a} (C_{1b} \sin \sqrt{by} + C_{2b} \cos \sqrt{by}) \times \\
&\times (C_{1c} \operatorname{sh} \sqrt{cz} + C_{2c} \operatorname{ch} \sqrt{cz}) \equiv \sum_{a,b} C_{2b} \varphi_1(y, z) = 0
\end{aligned}$$

$$\varphi(A_1, y, z) = \sum_{a,b} (C_{1a} \sin \sqrt{aA_1} + C_{2a} \cos \sqrt{aA_1}) \varphi_1(y, z) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, 0, z) &= \sum_{a,b} (C_{1a} \sin \sqrt{ax} + C_{2a} \cos \sqrt{ax}) \times \\
&\times (C_{1c} \operatorname{sh} \sqrt{cz} + C_{2c} \operatorname{ch} \sqrt{cz}) \equiv \sum_{a,b} C_{2b} \varphi_2(x, z) = 0
\end{aligned}$$

$$\varphi(x, A_2, z) = \sum_{a,b} (C_{1b} \sin \sqrt{bA_2} + C_{2b} \cos \sqrt{bA_2}) \varphi_2(x, z) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\varphi(0, y, z) &= \sum_{a,b} (C_{1a} \sin \sqrt{ax} + C_{2a} \cos \sqrt{ax}) \times \\
&\times (C_{1b} \sin \sqrt{by} + C_{2b} \cos \sqrt{by}) \equiv \sum_{a,b} C_{2c} \varphi_3(x, y) = 0,
\end{aligned}$$

дають $C_{2a} = 0$, $C_{2b} = 0$, $C_{2c} = 0$, $\sin \sqrt{a}A_1 = 0$ і $a = \left(\frac{\pi k}{A_1}\right)^2$,
аналогічно $\sin \sqrt{b}A_2 = 0$, $b = \left(\frac{\pi k}{A_2}\right)^2$. Отже $c = \left(\frac{\pi k}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{A_2}\right)^2$,
тобто залежить від двох індексів, тому $C_{1l} = C_{1kn}$ і тоді

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{k,n=1}^{\infty} C_{1kn} \sin \frac{\pi k x}{A_1} \sin \frac{\pi k y}{A_2} \operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{\pi k}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{A_2}\right)^2} z. \quad (3.4)$$

Тепер з неоднорідних граничних умов знаходимо C_{1kn} :

$$\varphi(x, y, A_3) = V.$$

Домножимо праву та ліву частини на $\sin \frac{\pi l x}{A_1} \sin \frac{\pi l y}{A_2}$ та інтегруємо
за x від 0 до A_1 і за y від 0 до A_2 . Враховуючи ортогональність
гармонічних функцій одержимо:

$$\frac{1}{4} C_{1lm} \operatorname{sh} A_3 \sqrt{\left(\frac{\pi l}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{A_2}\right)^2} = V \int_0^{A_1} \int_0^{A_2} \sin \frac{\pi l x}{A_1} \sin \frac{\pi m y}{A_2} dx dy$$

і звідси

$$C_{1lm} = \frac{4V(1 - (-1)^l)(1 - (-1)^m)}{\pi^2 m l \sqrt{\left(\frac{\pi l}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{A_2}\right)^2}}. \quad (3.5)$$

Отже, потенціал дається виразом (3.4), де коефіцієнти визначаються в (3.5);

б) потенціал:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{A_1} \sin \frac{\pi m y}{A_2} (A_{mn} \operatorname{sh} \gamma_{mn} z + B_{mn} \operatorname{ch} \gamma_{mn} z),$$

де

$$A_{mn} = \left[\frac{4V_2}{\pi^2 m n \operatorname{sh} \gamma_{mn} A_3} - \frac{B_{mn}}{4} \operatorname{cth} (\gamma_{mn} A_3) \right] [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n],$$

$$B_{mn} = \frac{4V_1}{\pi^2 m n} (1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n), \quad \gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{A_2}\right)^2}.$$

40. Функція Гріна для області $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$ задовольняє рівняння

$$\Delta' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.6)$$

з граничною умовою Діріхле $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in S} = 0$. Розв'язок (3.6) очевидний

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

де функція $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

з граничними умовами

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in S} = - \left. \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right|_{\mathbf{r}' \in S}.$$

Розв'язком рівняння Лапласа в області $\mathbf{r}' \in V$ можна взяти функцію (потенціал заряду-зображення)

$$F(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{c}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}(\mathbf{r}')|},$$

де $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ — деяка функція \mathbf{r} така, що завжди $\mathbf{d} \notin V$ при $\mathbf{r} \in V$, а c — деяка стала. Функцію $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ і сталу визначають з граничних умов і умови $\mathbf{d} \in V$. У такому випадку вибираємо площину $z = 0$, тоді граничні умови набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{c}{[(x' - d_x)^2 + (y' - d_y)^2 + (z' - d_z)^2]^{1/2}} = \\ & = - \frac{1}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Оскільки x' та y' — довільні, то $c = -1$, $d_x = x$, $d_y = y$ та $d_z = \pm z$. Враховуючи умову $\mathbf{d} \notin V$, маємо $d_z = -z$. Отже функція Гріна

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{k}z|}.$$

В області $z < 0$, $\Delta' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$;

а) за формулою Гріна

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_S(\partial \mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi_S(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS'.$$

У цьому випадку $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{kl})$, $\varphi_S = 0$, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in S} = 0$, тому

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - 2\mathbf{k}z|} \right] dV' = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{kl}|} - \frac{e}{|\mathbf{r} + \mathbf{kl}|} \right].$$

Густина індукованого поверхневого заряду

$$\sigma_{in} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, y, 0) = -\frac{el}{2\pi(x^2 + y^2 + l^2)^{3/2}}, \quad q_{in} = \int \sigma_{in} dS = -e;$$

б) очевидно,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{kl}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{kl}|} \right) - \frac{V}{4\pi} \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS'.$$

Оскільки

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{r}' \in S} = \frac{2z}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{3/2}},$$

то

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{kl}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{kl}|} \right) + V.$$

Густина заряду $\sigma_{in}(x, y)$ і q_{in} — ті самі.

41. Аналогічно задачі 40 одержимо

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

де беремо $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{c}{|\mathbf{r}' - \mathbf{d}(\mathbf{r})|}$, причому $|\mathbf{d}(\mathbf{r})| > R$. Із граничних

умов одержуємо:

$$\frac{c}{(R^2 + d^2(\mathbf{r}) - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}))^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}}.$$

Ця рівність справедлива при всіх \mathbf{R} , \mathbf{r} та \mathbf{d} при $d^2 > R^2$, що можливо, коли $\mathbf{d} \parallel \mathbf{r}$. Тепер

$$c^2(R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha) = (R^2 + d^2 - 2dR \cos \alpha),$$

що за умови $d^2 > R^2$ можливо, коли

$$c^2 R^2 = d^2 \quad \text{та} \quad c^2 r^2 = R^2.$$

Це дає $c = -R/r$ і $d = R^2/r > R$. Отже $\mathbf{d} = (R^2/r^2)\mathbf{r}$, а

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r}{|\mathbf{r}' - (R^2/r^2)\mathbf{r}|}.$$

а) за формулою Гріна, позначивши $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})$, де $d < R$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{d}) \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}R^2/r^2|} \right] dV' = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{d} - \mathbf{r}|} - \frac{R/r}{|\mathbf{d} - \mathbf{r}R^2/r^2|} \right] = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{Rr}{|d^2 r^2 - rR^2|} \right] = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{Rr}{\sqrt{d^2 r^4 + r^2 R^4 - 2r^3 R^2 d \cos \alpha}} \right] = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{R/d}{|\mathbf{r} - \mathbf{d} R^2/d^2|} \right]. \end{aligned}$$

Густина заряду і повний заряд

$$\sigma_{in} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(R) = -\frac{e}{4\pi R} \frac{R^2 - d^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}|^3}, \quad q_{in} = \oint_S \sigma_{in} dS = -e;$$

б) аналогічно:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|} - \frac{R/l}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}R^2/l^2|} \right] + V.$$

в) аналогічно:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}R^2/r^2 - \mathbf{l})}{|\mathbf{r}R^2/r^2 - \mathbf{l}|^3}.$$

43. Згідно з принципом суперпозиції, зважаючи на осьову симетрію вздовж напрямку заряд-центр сфери

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{r^l} P_l(\cos \theta).$$

Оскільки поблизу сфери, коли $r < d$ справедливо

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} = \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{r^l} P_l(\cos \theta).$$

то гранична умова $\varphi(\mathbf{r}) = V$ при $r < d$ набуває вигляду:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{d} \right)^l \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{a_l}{R^{l+1}} \right] P_l(\cos \theta) = V.$$

Звідси

$$a_0 = VR - \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad a_l = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{d^{l+1}}.$$

Отже

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 dr} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{dr} \right)^l P_l(\cos \theta) + \frac{VR}{r},$$

і оскільки $\frac{r^2}{dr} = \frac{rR^2/r^2}{d}$ або $\frac{R^2}{dr} = \frac{dR^2/d^2}{r}$, то

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{qR/d}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}R^2/d^2|} + \frac{VR}{r}.$$

Густина поверхневого заряду

$$\sigma(\mathbf{R}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\mathbf{R}) = \frac{\epsilon_0 V}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2 - R^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}|^3} \equiv \frac{\epsilon_0 V}{R} + \sigma_{in}(\mathbf{R}).$$

Повний заряд на сфері $q = \oint_S \sigma dS = 4\pi\epsilon_0 VR - \frac{qR}{d}$. Характерно, що індукований заряд $q_{in} = -qR/d$ менший за величиною від

заданого, на відміну від результату задачі 41, а).

44. Розклад за поліномами Лежандра:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{при } r < R$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{при } r > R.$$

Зовнішнє постійне поле $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{k}$, тому його потенціал

$$\varphi_{ext}(\mathbf{r}) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta).$$

На поверхні потенціал неперервний і рівний нулю. Тому:

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0,$$

і $a_l = 0$, $b_l = 0$ при $l \neq 0$, $b_1 = E_0 R^3$. Тому

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) = 0, & r \leq R, \\ \varphi(\mathbf{r}) = E_0 \left(-r + \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta, & r \geq R, \end{cases}$$

$$\sigma_{in} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}(R) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad q_{in} = 0.$$

45. Усередині сфери потенціал сталий. Зовні він створюється зовнішнім полем з потенціалом

$$\varphi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\chi}$$

і зарядом, індукованим на сфері:

$$\varphi_{sph}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\chi}.$$

В обох розкладах коефіцієнти A_{lm} та B_{lm} є комплексними. З граничної умови $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_{ext}(\mathbf{r}) + \varphi_{sph}(\mathbf{r}) = V$ при $r = R$ одержуємо розв'язок:

$$B_{lm} = -A_{lm} R^{2l+1} + V R \delta_{l0}.$$

Отже, при $r \geq R$ потенціал системи має вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{VR}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l \left[\left(\frac{r}{R}\right)^l - \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \right] P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\chi},$$

а при $r \leq R$, $\varphi(\mathbf{r}) = V$.

46. Згідно з методом дзеркальних відображень для побудови функції Гріна для одиничного заряду в точці \mathbf{r}' підбираємо заряди q_i у точках \mathbf{r}_i так, щоб якась еквіпотенціальна поверхня всієї системи зарядів збігалася з даною в задачі поверхнею.

а) доозначимо заряд q_1 у точці \mathbf{r}_1 . Тоді функція Гріна

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

Оскільки потенціал цієї системи $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, то еквіпотенціальна поверхня $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ описується рівнянням $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = -q_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ або

$$r^2(1 - q_1^2) - 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_1 - q_1^2 \mathbf{r}') + r_1^2 - q_1^2 r'^2 = 0. \quad (3.7)$$

Це рівняння задаватиме площину, якщо $q_1^2 = 1$:

$$-2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + r_1^2 - r'^2 = -2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'}{2} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Видно, що нормаль \mathbf{n} до площини паралельна відрізку $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'$, який з'єднує заряди, а сама площина проходить через точку з радіус-вектором $\mathbf{r}^* = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}')/2$, яка лежить посередині вказаного відрізка. Із загального рівняння площини $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) = 0$ і рівняння (3.8) випливає:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}' = \alpha \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'}{2}, \quad (3.9)$$

звідки $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}' - 2d\mathbf{n}$, де $d = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*)$ — відстань від одиничного заряду до площини.

Відкинувши сторонній розв'язок $q_1 = +1$, одержуємо

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}' + 2\mathbf{n}d|}. \quad (3.10)$$

Отже, уявний заряд — це відображення дійсного у площині. Якщо $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ і $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}^* = 0$, то (3.10) збігатиметься з результатами задачі 40;

б) вибираємо площини $z = 0$ і $x = 0$ і використовуємо поперед-

ний результат. У першій площині будуємо дзеркальне відображення та записуємо функцію Гріна

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{n}d|},$$

оскільки $d = z'$. У другій площині будуємо дзеркальне відображення обох зарядів і тоді результуюча функція Гріна буде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2i\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{k}z'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2i\mathbf{x}' + 2\mathbf{k}z'|}. \quad (3.11)$$

Наступні дзеркальні відображення нових положень зарядів не дають;

в) у площинах $z = 0$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}'_1^* = 0$ $z = d$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}'_1^* = 0$ дзеркально відображаємо заряд і уявні заряди (див. рис. 1).

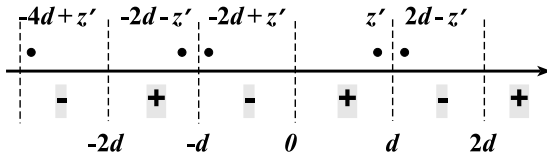


Рис. 1. До задачі 46, в)

Просумувавши, одержуємо

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2dn\mathbf{k}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2dn\mathbf{k} + 2z'\mathbf{k}|} \right);$$

г) із формули (3.7) випливає, що екіпотенціальна поверхня буде сферою радіуса R з центром у точці 0 , якщо:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 - q_1^2 \mathbf{r}' = 0, \\ (q_1^2 r'^2 - r_1^2)/(1 - q_1^2) = R^2. \end{cases}$$

Звідси $\mathbf{r} = q_1^2 \mathbf{r}'$, $q_1^2 = R^2/r'^2$. Відкинувши сторонній розв'язок

$q_1 > 0$, отримаємо:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'R^2/r'^2|}, \quad (3.12)$$

що збігається з результатом задачі 41;

д) згідно з рис. 2 і результатами задач а) та г) одержуємо:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{k}d|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'R^2/r'^2|} + \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'R^2/r'^2| + 2\mathbf{k}dR^2/r'^2}; \quad (3.13)$$

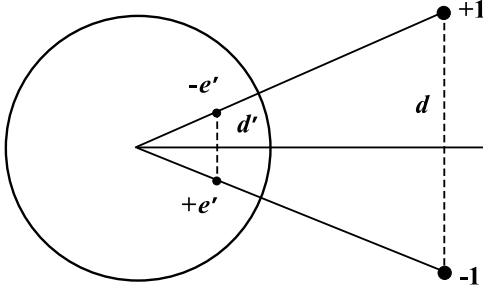


Рис. 2. До задачі 46, д)

є) згідно з рис. 3 і результатами задачі г) будемо дзеркальні відображення заряду. Тоді k -те зображення заряду в першій сфері

матиме величину $e_{1,k} = \frac{R_1}{r_{2,k-1}}$ і відстань від центра $r_{1,k} = \frac{R_2^2}{r_{2,k-1}}$.

Аналогічно для зображення в другій сфері $e_{2,k} = -R_2 e_{1,k-1}/r_{2,k-1}$ і $r_{2,k} = R_2^2/r_{1,k-1}$. Звідси:

$$\begin{cases} e_{1,k} = e_{1,k-2}(R_1/R_2), & e_{2,k} = e_{2,k-2}(R_2/R_1), \\ r_{1,k} = r_{1,k-2}(R_1/R_2)^2, & r_{2,k} = r_{2,k-2}(R_2/R_1)^2. \end{cases}$$

Отже, щоб знайти всі зображення треба знайти всі параметри нульового і першого зображень в обох сферах. Для них

$$e_{1,0} = e_{2,0} = +1, \quad r_{1,0} = r_{2,0} = r',$$

$$e_{1,1} = -R_1/r', \quad e_{2,1} = -R_2/r', \quad r_{1,1} = R_1^2/r', \quad r_{2,1} = R_2^2/r'.$$

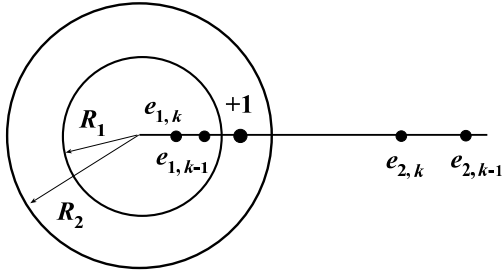


Рис. 3. До задачі 46, є)

Тоді одержуємо:

$$\begin{aligned}
 e_{1,2n} &= (R_1/R_2)^n, & e_{1,2n+1} &= -R_1(R_1/R_2)^n/r', \\
 e_{2,2n} &= (R_2/R_1)^n, & e_{2,2n+1} &= -R_2(R_2/r_1)^n/r', \\
 r_{1,2n} &= r'(R_1/R_2)^{2n}, & r_{1,2n+1} &= R_1^2(R_1/R_2)^{2n}/r', \\
 r_{2,2n} &= (R_2/R_1)^{2n}r', & r_{2,2n+1} &= R_2^2(R_2/R_1)^{2n}/r'.
 \end{aligned}$$

Після підстановки і перетворень одержуємо:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{R_1}{r'} \frac{(R_1/R_2)}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \frac{R_1^2}{r'^2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \right|} - \frac{R_2}{r'} \frac{(R_2/R_1)}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \frac{R_2^1}{r'^2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right|} \right] + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{R_1}{r'} \frac{(R_1/R_2)}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \frac{R_1^2}{r'^2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \right|} - \frac{R_2}{r'} \frac{(R_2/R_1)}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \frac{R_2^1}{r'^2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \right|} \right] \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n.
 \end{aligned}$$

47. а) $\mathbf{P} = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 R^3 \mathbf{k}$; б) $\mathbf{P} = \mathbf{p}$;

в) $D_{\alpha\beta} = 3(3(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) - 2A_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta})$;

г) $D_{ij} = D_i\delta_{ij}$, де $D_x = \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2)$, $D_y = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2)$,

$$D_z = \frac{e}{5}(2c^2 - a^2 - b^2), \quad e = \frac{4\pi}{3} abc\rho_0;$$

$$\text{д) } D_{ij} = D_i\delta_{ij}, \text{ де } D_1 = D_2 = -36ea^2, \quad D_3 = 72ea^2.$$

$$48. \text{ а) } \rho(\mathbf{r}) = 8a\varepsilon_0 \cos \theta \text{ при } r < R, \text{ та } 0 \text{ при } r > R;$$

$$\text{б) } \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha^2}{4\pi r} q \exp(-\alpha r);$$

$$\text{в) } \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{a}{\pi a^3} q \exp(-2r/a).$$

49. Рівняння шукаємо у вигляді $\Delta\varphi + \hat{L}(\varphi) = -q\frac{\delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$, де $\hat{L}(\varphi)$ — якийсь невідомий вираз, залежний від $\varphi(\mathbf{r})$. Звідси одержуємо

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}).$$

$$50. \text{ а) } W = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}; \quad \text{б) } W = -\frac{e^2}{9\pi\varepsilon_0 a}.$$

$$51. \text{ а) } W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{5R}, \quad Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3; \quad \text{б) } W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{2R}, \quad Q = 4\pi\sigma.$$

$$52. \mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\mathbf{p} - 3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})), \quad \mathbf{N} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[\mathbf{p}, \mathbf{n}], \text{ де } \mathbf{n} = \mathbf{r}/r,$$

\mathbf{r} — радіус-вектор диполя, q — у початку координат.

53. Відповідь:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha\partial x^\beta},$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e_\alpha p_\beta E_\gamma(\mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e_\alpha D_{\beta\sigma}\frac{\partial E_\gamma(\mathbf{r})}{\partial x_\sigma},$$

де $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — повністю антисиметричний тензор Леві-Чивіта, e_α — орти декартової системи координат.

54. Аналогічно задачі 40, $\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, причому $z' > 0$. Границь у задачі немає, а на місці розриву ε справедливо:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, 0+0) = \varphi(x, y, 0-0), \\ \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, 0+0) = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, 0-0). \end{cases}$$

Оскільки $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$, то це приводить до

умов на функцію Гріна

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} G(x, y, 0+0, \mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_2} G(x, y, 0-0, \mathbf{r}'), \\ \frac{\partial G(x, y, 0+0, \mathbf{r}')}{\partial z} = \frac{\partial G(x, y, 0-0, \mathbf{r}')}{\partial z}. \end{cases}$$

Оскільки, згідно із задачею 40, умови при $z = 0$ можна задовольнити тільки при

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{C}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{k}z|}, \quad \text{при } z > 0 \quad (z' > 0),$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{C_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{при } z < 0 \quad (z' > 0),$$

то одержуємо

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(1 + C) = \frac{1}{\varepsilon_2}C_1, \quad 1 - C = C_1.$$

Звідси

$$C = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad C_1 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Отже

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r} + 2\mathbf{k}z|} \right), \quad z > 0,$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad z > 0.$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -P_{2n} + P_{1n} = -(\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \\ &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)z'}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s|}, \quad Q_n = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

55. Потенціал має вигляд:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS',$$

де $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0$, $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_0 \cos \theta$, тому результат аналогічний задачі 38, а):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} rP \cos \theta, \quad \text{при } r < R,$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^2} P \cos \theta, \quad \text{при } r > R.$$

56. Потенціал усередині кулі згідно з осьовою симетрією:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta),$$

а зовні

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = A_0 + A_1 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}},$$

де сума задає потенціал кулі. Із граничних умов

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R), \quad \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(R) = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(R),$$

$$\varphi_2(r)|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

знаходимо сталі a_i , A_1 , A_2 , та b_i . Одержуємо

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = -\frac{3\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} r \cos \theta,$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = -E_0 r \cos \theta - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta.$$

57. Заряд q розміщуємо на осі z у точці $z = d > R$, а центр кулі — у початку координат. Тоді

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < R,$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{k}d|} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r > R.$$

Використавши граничні умови, знаходимо:

$$a_l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^{l+1}} \frac{2l+1}{l(\varepsilon_1+1)+1}, \quad b_l = \frac{qR^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 d^{l+1}} \frac{l(1-\varepsilon_1)}{l(\varepsilon_1+1)+1}.$$

Оскільки

$$\frac{2l+1}{1+l(\varepsilon_1+1)} = 1 + \frac{l(1-\varepsilon_1)}{l(1+\varepsilon_1)+1},$$

то і для $r < d$ можна явно виділити поле точкового заряду.

58. Початок циліндричної системи координат суміщаємо із зарядом, а вісь z направляємо перпендикулярно до пластинки. Тоді для $z < d$:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty a_1(k)e^{kz} J_0(k\rho) dk,$$

для $d < z < d+a$:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty b_1(k)e^{-kz} J_0(k\rho) dk + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty a_2(k)e^{kz} J_0(k\rho) dk,$$

для $z > d+a$:

$$\varphi_3(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty b_2(k)e^{-kz} J_0(k\rho) dk,$$

де a_i та b_i — деякі невідомі функції.

Використовуючи розклад

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk$$

і граничні умови в точках $z = d$ та $z = d+a$ знаходимо невідомі функції

$$a_1(k) = -\operatorname{sign}(\beta)e^{-2kd} \frac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh}(ka - \ln|\beta|)},$$

$$a_2(k) = -\operatorname{sign}(\beta)e^{-2kd-ka} \frac{2(1-\beta)}{\operatorname{sh}(ka - \ln|\beta|)},$$

$$b_1(k) = \frac{1-\beta}{|\beta|} \frac{e^{ka}}{\operatorname{sh}(ka - \ln|\beta|)}, \quad b_2(k) = b_1(k)(1+\beta),$$

де $\beta = (\varepsilon_1 - 1)/(\varepsilon_1 + 1)$. Випадок $d = 0$, $a \rightarrow \infty$ дає:

$$a_1(k) = -\beta, \quad a_2(k) = 0, \quad b_1(k) = \frac{2}{\varepsilon_1 + 1},$$

а $\varphi_3(\mathbf{r})$ не має змісту. Тоді

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{e(1 - \beta)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + 1)r} = \varphi_2(\mathbf{r}).$$

59. Використовуючи результат задачі 58 і симетрію даної задачі, шукаємо потенціал у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q\alpha}{4\pi\epsilon_0 r},$$

за умови $\varphi_1 = \varphi_2$, $\epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ на межі діелектриків. Сталу α шукаємо з умов

$$q = \oint_S \sigma dS = - \oint_S \epsilon_0 \epsilon_i \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \quad \text{де } i = \begin{cases} 1 & \text{при } z < 0, \\ 2 & \text{при } z > 0, \end{cases}$$

що дає $\alpha = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$. Отже, $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)r}$ і

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{2\pi r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{2\pi r^3}.$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{q\epsilon_i}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}, \quad \text{де } i = 1 \text{ при } z < 0, i = 2 \text{ при } z > 0.$$

60. Сила Архімеда повинна врівноважуватися вагою та електричною силою

$$\mu g \frac{2\pi}{3} R^3 = Mg + F_z,$$

де

$$F_z = \oint T_{zk} n_k dS, \quad T_{ik} = \epsilon_0 \epsilon \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right)$$

тензор максвеллівських натягів. Використавши для \mathbf{E} результат задачі 59 при $\epsilon_2 = 1$, одержуємо

$$q = R(\epsilon + 1) \sqrt{\frac{8\pi}{\epsilon - 1} \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \mu g - Mg \right)}.$$

61. $\text{div } \mathbf{D} = e\delta(\mathbf{r})$, $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_{ik} \mathbf{e}_i E_k$,

$$E_k = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \quad \epsilon_{ik} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}).$$

У системі координат, яка збігається з головними осями тензора ε_{ik}

$$\varepsilon_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}),$$

тому після заміни змінної $x_i = \sqrt{\varepsilon_i} x'_i$, одержуємо

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)^{1/2}r'(\mathbf{r})},$$

де $r' = (x^2/\varepsilon_x + y^2/\varepsilon_y + z^2/\varepsilon_z)^{1/2}$.

62. Виберемо вісь Oy вздовж нормалі до поверхні. З граничних умов для дотичних складових $E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1t} = D_{2t}$ одержуємо:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \mathbf{n}(E_{0y} - \varepsilon_{yx}E_{0x} - \varepsilon_{yz}E_{0z}).$$

63. Після перетворень рівняння Пуассона має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \lambda[(\Delta\varphi_1) \cdot (\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_1) \cdot \nabla(\nabla\varphi_1)^2], & \text{при } r < R, \\ \Delta\varphi_2 &= 0, & \text{при } r > R. \end{aligned}$$

Граничні умови:

$$\varphi_1(\mathbf{R}) = \varphi_2(\mathbf{R}), \quad \varepsilon_1[1 - \lambda(\nabla\varphi_1(\mathbf{R}))^2] \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}(\mathbf{R}) = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}(\mathbf{R}). \quad (3.14)$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді ряду за параметром λ :

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \varphi_i^{(0)}(\mathbf{r}) + \lambda\varphi_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \lambda^2\varphi_i^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots$$

Тоді в нульовому наближенні за λ отримаємо $\Delta\varphi_1^{(0)} = 0$, $\Delta\varphi_2^{(0)} = 0$ і розв'язок дається в задачі 56

$$\varphi_1^{(0)}(\mathbf{r}) = -\frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0 r \cos\theta, \quad \varphi_2^{(0)}(\mathbf{r}) = -E_0 r \cos\theta \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{R^3}{r^3}\right).$$

Для пошуку $\varphi_i^{(1)}$ в праву частину підставляємо $\varphi_i^{(0)}$. Оскільки $\Delta\varphi_i^{(0)} = 0$, а $[\nabla\varphi_1^{(0)}(\mathbf{r})]^2 = \eta^2 E_0^2 = \text{const}$, де $\eta = 3\varepsilon_2/(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$, то

$$\lambda\Delta\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r}) = 0,$$

а гранична умова буде такою самою за формою, як і в нульовому наближенні, тільки замість ε_1 буде $\varepsilon_1(1 - \lambda\eta^2 E_0^2)$. Отже, перше

наближення матиме вигляд

$$\varphi_1^{(1)}(\mathbf{r}) = -\alpha\eta E_0 r \cos \theta, \quad \varphi_2^{(1)}(\mathbf{r}) = -\gamma\beta \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta, \quad (3.15)$$

де $\gamma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$, а величини α та β знайдуться з граничних умов. Як видно з (3.15) залежність $\varphi_i^{(1)}$ від r та θ така сама як і в (3.15). Отже і для $\varphi_2^{(1)}$ права частина в (3.14) буде нулем. Це означає, що $\varphi_i^{(2)}(\mathbf{r})$ залежатимуть від r та θ так, як і $\varphi_i^{(1)}(\mathbf{r})$. Очевидно, що і будь-яке наближення вищого порядку за λ не змінить характеру залежності $\varphi_i(\mathbf{r})$ від r та θ , тому розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}) &= -A\eta E_0 r \cos \theta, \\ \varphi_1(\mathbf{r}) &= -E_0 r \cos \theta - B\gamma E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де A та B знаходимо з граничних умов $B = (\eta A - 1)/\gamma$, а A є розв'язком рівняння

$$A - A^3 \lambda \frac{\varepsilon_1 \eta^3 E_0^2}{3\varepsilon_2} = 1.$$

У нульовому за λ наближенні $A = 1$ та $B = 1$, а в першому

$$A = 1 + \lambda \frac{\varepsilon_1 \eta^3 E_0^2}{3\varepsilon_2}, \quad B = 1 - \lambda \frac{\varepsilon_1 \eta^3 E_0^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Розв'язок $A > 0$, який неперервно залежить від E_0 існує, коли

$$\frac{\lambda \varepsilon_1 \eta^3 E_0^2}{3 \varepsilon_2} \leq \frac{4}{27},$$

а при збільшенні значення E_0 величина A змінюється стрибкоподібно і $A \leq -3$.

64. Задачу для сфероїда зручно розв'язувати у відповідній сфероїдальній системі координат. Для того, щоб ввести таку систему координат розглянемо еліпс з півсями a та b ($a > b$), відстань між фокусами $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Поверхня, отримана в результаті обертання такого еліпса навколо малої осі є стиснутим уздовж осі симетрії сфероїдом.

Введемо безрозмірну величину $\xi = a/c$ ($\xi \geq 1$). Тоді рівняння стиснутого сфероїда має вигляд

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2. \quad (3.17)$$

Крім сфероїда розглянемо співфокусний однополюсний гіперболоїд обертання:

$$\frac{x^2 + y^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2. \quad (3.18)$$

Відстань між вершинами гіперболи, яка при обертанні навколо осі z утворює цей гіперболоїд, дорівнює $2c\eta$, а відстань між фокусами гіперболи дорівнює $2c$.

Якщо покласти $y = 0$, то з рівнянь (3.17) і (3.18) отримаємо систему еліпсів і гіпербол, яку можна розглядати як криволінійну ортогональну систему координат у площині $y = 0$. Еліпсу, заданому параметром ξ , і гіперболі, заданій параметром η , відповідають чотири точки перетину, які відрізняються тільки знаками координат x та z . Якщо вказати ці знаки, то буде визначена одна точка площини $y = 0$. Різним точкам цієї площини будуть відповідати різні значення параметрів ξ , η і різний вибір знаків x , z .

У просторі перетин сфероїда та гіперболоїда відбувається по двох колах у верхній ($z > 0$) і нижній ($z < 0$) частинах сфероїда. Для вибору одного із цих двох кіл потрібно вказати знак z (тобто $\text{sign } z$).

Щоб на вказаному колі визначити точку, потрібно задати азимутальний кут ψ :

$$\psi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (3.19)$$

Таким чином, чотири величини ξ , η , ψ , $\text{sign } z$ однозначно визначають точку в просторі. Ця система координат називається *стисненою сфероїдальною системою координат*. З рівнянь (3.17) – (3.19) знайдемо співвідношення, які виражають декартові координати через ξ , η , ψ , $\text{sign } z$:

$$x = c \xi \eta \cos \psi, \quad y = c \xi \eta \sin \psi, \quad z = \pm \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (3.20)$$

Якщо ввести відстані від фокусів еліпса (який знаходиться у площині, що проходить через вісь Oz і точку з координатами x , y , та z), рівні $r_{\pm} = \left[(\sqrt{x^2 + y^2} \mp c)^2 + z^2 \right]^{1/2}$, то обернене щодо (3.20) перетворення можна буде записати у формі

$$\xi = \frac{r_+ + r_-}{2c}, \quad \eta = \frac{r_- - r_+}{2c}, \quad \psi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (3.21)$$

У нашому випадку коефіцієнти Ламе найзручніше знайти виходячи з (3.20). Тоді

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad (3.22)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \quad (3.23)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = c \xi \eta. \quad (3.24)$$

Рівняння Лапласа в даній системі координат запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (3.25)$$

Множник перед фігурною дужкою можна скоротити.

Важливо, що рівняння (3.25) допускає розв'язок у вигляді функції від однієї змінної, наприклад $\varphi = \varphi(\xi)$. Це пов'язано з тим, що у сфероїдальній системі координат рівняння Лапласа допускає відокремлення змінних.

Допустивши розв'язок (3.25) у вигляді $\varphi = \varphi(\xi)$ і врахувавши формули (3.22) – (3.24), отримаємо з (3.25)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Розв'язок у вигляді функції однієї змінної означає, що еквіпотенціальні поверхні поза провідним сфероїдом також є сфероїдами.

Інтегруючи (3.17), отримаємо

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{A}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.27)$$

Інтегруючи ще раз, знайдемо

$$\varphi(\xi) = A \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + B \quad (\xi > \xi_0), \quad (3.28)$$

де B — друга константа інтегрування.

Адитивна константа B відповідає за значення потенціалу на нескінченності ($\xi \rightarrow \infty$); тому покладемо $B = 0$. Константа A

пов'язана із зарядом провідника, який за умовою задачі дорівнює Q . Зв'язок між константою A і зарядом найпростіше знайти з асимптотичної ($\xi \rightarrow \infty$) форми (3.17). Згідно з (3.21) маємо $c\xi = (r_+ + r_-)/2 \simeq r$ (тут $\xi \rightarrow \infty$), тому

$$\varphi_{ac} = \frac{A}{\xi} \simeq \frac{cA}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.29)$$

звідки

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}. \quad (3.30)$$

Таким чином, потенціал у випадку зарядженого провідного стисненого сфероїда дорівнює

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b}. \quad (3.31)$$

Якщо замість заряду Q заданий потенціал провідника φ_0 , то потенціал у точках поза провідником дорівнює

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \frac{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{\xi^2 - 1})}{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{\xi_0^2 - 1})} \quad (3.32)$$

Із формули (3.17) можна отримати вираз для ємності стисненого сфероїда:

$$C = 4\pi\epsilon_0 c \frac{1}{\operatorname{arctg}(c/b_0)}. \quad (3.33)$$

У границі $\xi_0 \rightarrow 1$ сфероїд переходить у диск. При цьому для ємності диска одержимо

$$C_{\text{диск}} = 4\pi\epsilon_0 c \frac{2}{\pi}. \quad (3.34)$$

Для визначення напруженості поля потрібно знайти градієнт, у якого відмінною від нуля компонентою буде

$$(\operatorname{grad} \varphi(\xi))_\xi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (3.35)$$

Тому напруженість поля дорівнює

$$E(\xi, \eta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - \eta^2}}. \quad (3.36)$$

Із (3.18) видно, що на відміну від потенціалу, поле в різних точках одного й того самого сфероїда різне. Найбільша напруженість у випадку стисненого сфероїда — на “екваторі”, де $\eta = 1$, найменша ж — на “полюсах”, де $\eta = 0$. Густина заряду дорівнює

$$\sigma = \varepsilon_0 E(\xi_0, \eta) = \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}. \quad (3.37)$$

Для перевірки можна впевнитися у тому, що інтегрування густини заряду по поверхні провідного сфероїда дає заряд провідника Q . Враховуючи, що $dS = h_2 h_3 d\eta d\psi$, знайдемо

$$\iint_S dS = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} c^2 \frac{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \xi_0 \eta d\eta d\psi = Q. \quad (3.38)$$

Вираз (3.18) для густини заряду можна перетворити на більш зручну форму. Враховуючи, що

$$\xi_0^2 - \eta^2 = \frac{a_0^2 b_0^2}{c^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4} \right), \quad (3.39)$$

отримаємо

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a_0^2 b_0} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)/a_0^4 + z^2/b_0^4}} \quad (3.40)$$

У границі $b_0 \rightarrow 0$, $c \rightarrow a = R$, з (3.18) отримаємо розподіл заряду на провідному диску. При цьому слід врахувати, що для диска $(x^2 + y^2)/a_0^4 \ll z^4/b_0^4$, і скористатися рівнянням еліпсоїда у вигляді $z^2/b_0^2 = 1 - (x^2 + y^2)/a_0^2$. У результаті, для диска

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)/R^2}}, \quad (3.41)$$

де R — радіус диска. У центрі диска густина заряду вдвічі менша середньої густини $Q/(2\pi R^2)$. На краях диска густина прямує до нескінченності, що пов'язано з його нескінченно малою товщиною.

65. Виділимо два частинних випадки, в яких зовнішнє незбурене поле напрямлене паралельно (\parallel) або перпендикулярно (\perp) до осі симетрії сфероїда. Потенціал незбуреного поля при цьому буде описуватись виразом

$$\varphi_0 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\xi) T \quad (3.42)$$

(тут T — деяка константа). Поза діелектрика (область 2) потенціал збуреного поля (тобто поля за присутності діелектрика) будемо шукати у вигляді суперпозиції двох розв'язків рівняння Лапласа, тобто

$$\varphi_2 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\xi) T \left(1 - \frac{C_2 A(\xi)}{A(\xi_0)} \right), \quad (3.43)$$

де C_2 — деяка константа, яка визначається з граничних умов (для провідника ця константа дорівнює одиниці).

У внутрішній області діелектрика (область 1), другий розв'язок невірний, оскільки є сингулярним у фокальних точках. Тому всередині діелектрика розв'язок шукаємо у формі

$$\varphi_1 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\xi) T C_1. \quad (3.44)$$

Умова неперервності тангенціальних компонент електричного поля має вигляд

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \Big|_S = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_S, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \Big|_S = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \Big|_S. \quad (3.45)$$

Умова неперервності потенціалу полягає у вимозі

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S, \quad (3.46)$$

рівняння (3.45) та (3.46) приводять до одного й того самого рівняння для визначення констант C_1 і C_2 :

$$1 - C_2 = C_1. \quad (3.47)$$

Умова неперервності нормальних складових вектора електростатичного зміщення \mathbf{D} має вигляд

$$\varepsilon_r \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \Big|_S = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \Big|_S \quad (3.48)$$

і приводить до другого рівняння на константи C_1 і C_2 :

$$\frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} (1 - C_2) + G_0 C_2 \frac{1}{G_0^2 R A(\xi_0)} = \varepsilon_r \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} C_1. \quad (3.49)$$

Рівняння (3.49) можна записати у формі

$$1 - C_2 + \frac{1}{n} C_2 = \varepsilon_r C_1, \quad (3.50)$$

де

$$n = A(\xi_0)G_0(\xi_0)G'_0(\xi_0)R(\xi_0) \left(G'_0(\xi_0) = \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} \right). \quad (3.51)$$

Розв'язуючи (3.47) та (3.50), отримаємо

$$C_1 = \frac{1}{1 + n(\varepsilon_r - 1)}, C_2 = \frac{n(\varepsilon_r - 1)}{1 + n(\varepsilon_r - 1)}. \quad (3.52)$$

Поле всередині діелектрика рівне

$$E = \frac{E_0}{1 + n(\varepsilon_r - 1)}, \quad (3.53)$$

тобто поле всередині діелектрика однорідне, і напруженість його менша за напруженість зовнішнього незбуреного поля E_0 .

Зовні ж поле неоднорідне. Його потенціал описується функцією (3.43) із значенням C_2 , яке дається співвідношенням (3.42). З рівності (3.42) видно, що поле всередині та зовні сфероїда залежить не тільки від значення діелектричної проникності ε_r , але й від форми сфероїда, якою визначається величина n . Назвемо цю величину фактором форми.

Для сфероїда виникають два “поперечні” фактори форми n_x і n_y , які позначатимемо n_\perp , так як $n_x = n_y$, і “поздовжній” фактор форми $n_z = n_\parallel$. Покажемо, що

$$n_x + n_y + n_z = 1, \quad \text{тобто} \quad 2n_\perp + n_\parallel = 1. \quad (3.54)$$

Для стисненої сфероїдальної системи координат

$$G_{0\perp}(\xi_0)G'_{0\perp}(\xi_0)R(\xi_0) = G_{0\parallel}(\xi_0)G'_{0\parallel}(\xi_0)R(\xi_0) = \frac{a_0^2 b_0}{c^3}, \quad (3.55)$$

тобто ці множники рівні. При цьому,

$$n_\parallel = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left(\frac{c}{b_0} - \operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} \right), \quad n_\perp = \frac{1}{2} \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} - \frac{c b_0}{a_0^2} \right). \quad (3.56)$$

Для витягнутої сфероїдальної системи координат

$$G_{0\parallel}(\xi_0)G'_{0\parallel}(\xi_0)R(\xi_0) = G_{0\perp}(\xi_0)G'_{0\perp}(\xi_0)R(\xi_0) = \frac{a_0 b_0^2}{c^3}, \quad (3.57)$$

При цьому

$$n_{\parallel} = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} - \frac{c}{a_0} \right), \quad n_{\perp} = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} \left(\frac{c a_0}{b_0^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} \right). \quad (3.58)$$

За допомогою (3.56) і (3.58) легко доводиться співвідношення (3.54) (тут $a_0^2 = b_0^2 - c^2$).

У граничних випадках отримаємо з (3.56) та (3.58)

$$n_{sphere} = \frac{1}{3}, \quad n_{disc\parallel} = 1, \quad n_{disc\perp} = 1. \quad (3.59)$$

Поле всередині діелектрика в даному випадку дорівнює

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + n(\epsilon_r - 1)}. \quad (3.60)$$

Якщо поле \mathbf{E}_0 складає кут θ з віссю Oz (вісь сфероїда) і перпендикулярне до осі Oy , тобто $E_{0z} = E_0 \cos \theta$, $E_{0x} = E_0 \sin \theta$, то

$$E_z = \frac{E_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel}(\epsilon_r - 1)}, \quad E_x = \frac{E_0 \sin \theta}{1 + n_{\perp}(\epsilon_r - 1)}, \quad E_y = 0. \quad (3.61)$$

Усередині діелектрика у формі сфероїда поле знову однорідне, але його напрямок не збігається з напрямком зовнішнього невозбуреного поля \mathbf{E}_0 , так як $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$.

Пошук дипольного моменту:

$$p_z = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel}(\epsilon_r - 1)} V, \quad p_x = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_0 \sin \theta}{1 + n_{\perp}(\epsilon_r - 1)} V, \quad p_y = 0, \quad (3.62)$$

де V — об'єм сфероїда. Для стисненого сфероїда $V = (4/3)\pi a_0 b_0^2$. Для витягнутого сфероїда $V = (4/3)\pi a_0^2 b_0$. Відмітимо, що для всіх чотирьох випадків виконується $\frac{V}{n} = \frac{4\pi}{3} \frac{c^3}{A(\epsilon_0)}$.

66. Розв'язок цієї задачі можна провести аналогічно задачі 65. Відповідь отримується із формул (3.61) заміною ϵ_r на $1/\epsilon_r$.

67. $C = q/V$, де q — заряд системи, V — її потенціал. Звідси для сфери $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

а) $C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, де R_1 та R_2 — радіуси сфер;

б) $C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}$, S — площа пластин, d — відстань між ними;

в) $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}$, де l — довжина конденсатора, R_1 та R_2 — радіуси циліндрів.

68. На одиницю довжини $C = \kappa/(\varphi_1 - \varphi_2)$, де φ_1 та φ_2 — потенціали провідників. Вважаючи, що потенціал змінюється мало на товщині провідника, а їх заряди протилежні, маємо

$$\varphi_1 = -\frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln R_1 + \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln d, \quad \varphi_2 = -\frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln R_2 - \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln d.$$

Звідси $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d^2}{R_1 R_2}}$.

$$69. C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}.$$

71. Враховуючи симетрію задачі, з інтегрального рівняння магнітостатики одержуємо в циліндричній системі координат:

а) $B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 j_0 \rho}{2}$ або $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} [j_0, \mathbf{r}]$ (при $\rho \leq R$), $B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2\rho}$ або $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} [\mathbf{k}, \mathbf{r}]$ (при $\rho > R$), де $I = j_0 \pi R^2$ — повний струм;

б) $B_\varphi = \frac{\mu_0 \alpha}{n+2} \rho^{n+1}$ при $\rho \leq R$, $B_\varphi = \frac{\mu_0 j_0 R^{n+2}}{(n+2)\rho}$ при $\rho > R$;

в) $B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \alpha}{\rho} \left(\frac{2\pi\rho}{R} a \sin \frac{2\pi\rho}{R} a + \cos \frac{2\pi\rho}{R} a - 1 \right)$ при $\rho \leq R$;

$B_\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \alpha}{\rho} \left(\frac{R}{2\pi\alpha} \right) (2\pi\alpha \sin 2\pi\alpha + \cos 2\pi\alpha - 1)$ при $\rho > R$.

$$72. \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2} [j_0, \mathbf{a}] = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

73. Вісь z направимо по нормалі до площини, а вісь x уздовж струму i_0 , об'ємна густина якого $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = i_0 \delta(z)$. Із симетрії задачі випливає, що $\mathbf{B}(z) = -\mathbf{B}(-z) = \mathbf{e}_y B_y(z)$, а з інтегрального рівняння — $B_y(z) = \frac{1}{2} \mu_0 i_0$.

74. Одна площина при $z = d/2$, друга при $z = -d/2$. Тоді

$$\mathbf{B}(z) = -\mathbf{B}(-z) = -\frac{1}{2} \mu_0 ([i_1, \mathbf{k}] + [i_2, \mathbf{k}]), \quad \text{при } |z| > \frac{d}{2},$$

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{1}{2} \mu_0 ([i_1, \mathbf{k}] - [i_2, \mathbf{k}]), \quad \text{при } |z| < \frac{d}{2}.$$

а) $Ox || i_1 = i_2$, $B_y(z) = i\mu_0$, при $|z| > \frac{d}{2}$; $B_y(z) = 0$, при $|z| < \frac{d}{2}$;

б) $Ox || i_1 = -i_2$, $B_y(z) = 0$, при $|z| > \frac{d}{2}$; $B_y(z) = i\mu_0$, при $|z| < \frac{d}{2}$.

75. Вибираємо осі як у задачі 73, а смугу розбиваємо на нескін-

ченно малі провідники з повним струмом $I(\mathbf{r}) = i_0 dy'$, де y' — координата окремого провідника, dy' — його ширина. Підсумовуючи поля всіх лінійних провідників, які одержані в задачі 71, в) для випадку $r > R$ знаходимо

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\mu_0 i_0}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} [\mathbf{i}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dy' = \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \left[\mathbf{j} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - a/2}{z} + \operatorname{arctg} \frac{y + a/2}{z} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{k} \ln \frac{z^2 + (y - a/2)^2}{z^2 + (y + a/2)^2} \right]. \end{aligned}$$

При $a \rightarrow \infty$ отримаємо $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{2} \mathbf{j}$.

76. За умовою

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \mathbf{k} \delta(k) \left[\delta \left(y - \frac{d}{2} \right) - \delta \left(y + \frac{d}{2} \right) \right],$$

тому

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I \mathbf{k}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[\frac{1}{(x^2 + (y - d/2)^2 + (z - z')^2)^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(x^2 + (y + d/2)^2 + (z - z')^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

Інтеграл обчислюється як невласний, у результаті:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{k} \ln \frac{x^2 + (y - d/2)^2}{x^2 + (y + d/2)^2}.$$

77. У циліндричній системі координат $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \mathbf{e}_\varphi \delta(\rho - R) \delta(z)$,

тому

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_{\varphi'} R d\varphi'}{(R^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi'))^{1/2}}.$$

Оскільки $\mathbf{e}_{\varphi'} = -\mathbf{i} \sin \varphi' + \mathbf{j} \cos \varphi'$, то \mathbf{A} матиме тільки дві компоненти A_x та A_y , або у полярній системі координат $A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\rho$ та $A_\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\varphi$:

$$A_\rho = -\frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \varphi') d\varphi'}{[R^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi' d\varphi'}{[R^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho R \cos \varphi']^{1/2}},$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi') d\varphi'}{[R^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[R^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho R \cos \varphi']^{1/2}}.$$

Після заміни $\varphi' = \pi + 2\theta$ інтеграли зводяться до таких:

$$A_\rho = \frac{\mu_0 IR}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{[(\rho + R)^2 + z^2 - 4\rho R \sin^2 \theta]^{1/2}} = 0,$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 IR}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \theta - 1) d\theta}{[(\rho + R)^2 + z^2 - 4\rho R \sin^2 \theta]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right],$$

де

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

є повними еліптичними інтегралами першого та другого родів,

$$0 \leq k^2 = \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + z^2} \leq 1.$$

При $k^2 \ll 1$

$$K(k) \simeq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2\right), \quad E(k) \simeq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2\right),$$

тому на осі z , коли $k \rightarrow 0$ одержуємо $A_\varphi = 0$.

78. У сферичній системі координат $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{v} \delta(r-R)$, де $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ є поверхневою густиною заряду, $\mathbf{r} = [\Omega, \mathbf{r}]$ — швидкість поверхні сфери в точці \mathbf{r} . Тому, вибравши вісь z уздовж Ω :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{Q}{4\pi R^2} \int_V \frac{[\Omega, \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{\mu_0 Q \gamma \Omega R}{4\pi^2} \times \\ \times \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi' (-i \sin \theta' \sin \varphi' + \mathbf{j} \sin \theta' \cos \varphi') \sin \theta'}{[R^2 + r^2 - 2Rr(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'))]^{1/2}}.$$

Використавши результат задачі 18, додаток 6 і властивості сферичних гармонік, одержимо:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q \gamma \Omega R}{(4\pi r)^2} \frac{4\pi}{3} P_1^1(\cos \theta) (-i \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi), \quad \text{при } r > R,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q r \Omega}{12\pi R} P_1^1(\cos \theta) (-i \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi), \quad \text{при } r < R,$$

де $(-i \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi) \equiv \mathbf{e}_\varphi$.

Тепер за формулою $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ знаходимо:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \theta \Omega}{4\pi R} (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta), \quad \text{при } r < R,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \theta \Omega R^2}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta), \quad \text{при } r > R,$$

Згідно із задачею 17 а), $\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta = \mathbf{k}$,

$$2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta = \\ = 2\mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) + \sin \theta (\mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta) = \\ = 2\mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{k} = 3\mathbf{e}_r (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{k},$$

тому

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \Omega, \quad \text{при } r < R,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q R^2}{12\pi r^3} (3\mathbf{n}(\Omega \cdot \mathbf{n}) - \Omega), \quad \text{при } r > R,$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$. Отже зовні сфери магнітне поле має індукцію магнітного диполя $\mathbf{m} = \frac{QR^3}{3} \Omega$, що очевидно.

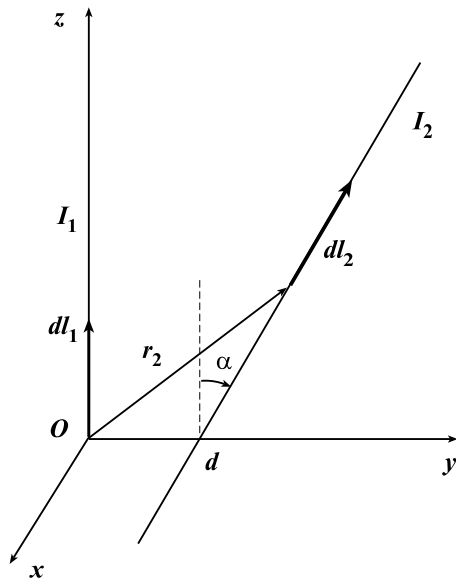


Рис. 4. До задачі 83

79. $m = \frac{1}{5} eR^2\Omega$, $\gamma = \frac{|m|}{|L|} = \frac{e}{2m}$.

80. а) $m = k \frac{e\hbar}{2m}$; б) $m = k \frac{e\hbar}{2m}$; в) $m = k \frac{e\hbar}{m}$.

81. $m = a$.

82. Перетворюємо загальний вираз для моменту:

$$m' = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] dV = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] dV + \\ + \frac{1}{2} \left[\mathbf{r}_0, \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) dV \right] = \mathbf{m} + 0,$$

оскільки, згідно із задачею 12 а), умови якої виконуються, якщо \mathbf{m} є скінченною величиною, $\int_V \mathbf{j} dV = 0$.

83. Виберемо вісь z уздовж струму I_1 , площину xz паралельно струму I_2 , а вісь y так, щоб струм I_2 перетинав її на відстані d . Тоді (див. рис. 4)

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{L_2} [\mathbf{dl}_2, \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)],$$

де $d\mathbf{l}_2 = -i \sin \alpha dl + \mathbf{k} \cos \alpha dl$ — елемент довжини уздовж струму I_2 , $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)$ — магнітне поле струму I_1 у точці \mathbf{r}_2 . Згідно із задачею 71 а),

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho^2} [\mathbf{k}, \mathbf{r}],$$

тому

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{l}_2) - \mathbf{r}_2(\mathbf{k} \cdot d\mathbf{l}_2)}{d^2 + l^2 \sin^2 \alpha} = -\mathbf{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

84. Розмістимо перше кільце у площині $z = 0$, а друге — у площині $z = d$. Сила взаємодії $\mathbf{F} = -\nabla U$, де $U = \int \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \mathbf{j}(\mathbf{r}_2) dV_2$ — енергія взаємодії другого провідника з магнітним полем першого. Для $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ використовуємо результат задачі 77, а для струму

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = I_2 e_\varphi \delta(z - d) \delta(\rho - R)$$

отримаємо:

$$U = 2\mu_0 I_1 I_2 \sqrt{R_1 R_2} \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right],$$

де $k^2 = 4R_1 R_2 / (z^2 + (R_1 + R_2)^2)$, $z = d$; $K(k)$ та $E(k)$ — еліптичні інтегралі першого та другого родів. Використовуючи властивості

$$K'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad E'(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k},$$

одержимо

$$\mathbf{F} = k\mu_0 I_1 I_2 \frac{d}{\sqrt{d^2 + (R_1 + R_2)^2}} \left(-K(k) + \frac{R_1^2 + R_2^2 + d^2}{(R_1 - R_2)^2 + d^2} E(k) \right).$$

85. $U = \int \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) dV$, де $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторний потенціал магнітного моменту протона, \mathbf{j}_2 — густина орбітального струму. Оскільки

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\boldsymbol{\mu}_p, \mathbf{r}]}{r^3},$$

то

$$U = \frac{\mu_0 e \hbar}{96\pi m a^3} \boldsymbol{\mu}_p \cdot \mathbf{k}.$$

86. Аналогічно до попередньої задачі

$$U = \frac{\mu_0 e \hbar}{3\pi m a^3} \boldsymbol{\mu}_p \cdot \mathbf{k}.$$

Звідси видно, що спін-спінова взаємодія має більшу енергію, ніж спін-орбітальна.

87. $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{N} = [\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}(\mathbf{r})]$.

88. Провід знаходиться в середовищі 1. Поле в ньому еквівалентне полю двох струмів: $I_1 = \mu_1 I$, який тече по даному проводу, та

$$I_2 = \mu_1 I \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2},$$

який тече по дзеркальному відображенню даного провода на межі середовищ. У середовищі 2 поле еквівалентне полю сталого струму $I_3 = \mu_2 I \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$, який тече по даному проводу.

89. У загальному випадку

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

де $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M}_0$, $\mathbf{i} = [\mathbf{M}_0, \mathbf{n}]$ — густина поверхневого струму. Подавши $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(\mathbf{r})\delta(r - R)$ зводимо задачу до задачі 78. Тому

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}_0, \quad \text{при } r < R,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{m}), \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0}, \quad \text{при } r > R,$$

де $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}_0$ — магнітний момент кулі.

90. Оскільки скрізь $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$, то можна ввести скалярний потенціал $\mathbf{H} = -\text{grad } \psi$ і тоді задача зводиться до аналогічної з електростатики (див. задачу 56). Отже:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = -\frac{3B_0}{\mu_0(\mu_1 + 2\mu_2)} r \cos \theta, \quad \text{при } r < R,$$

$$\psi_2(\mathbf{r}) = -\frac{B_0}{\mu_0\mu_2} r \cos \theta - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} \frac{B_0 R^3 \cos \theta}{\mu_0\mu_1 r^2}, \quad \text{при } r > R$$

і звідси

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0 (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) = \frac{3\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{B}_0, \quad \text{при } r < R.$$

Оскільки $\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta = \mathbf{k}$,

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + \frac{\mu_0 \mu_2}{4\pi r^3} (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}), \quad \text{при } r > R,$$

де $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, і $\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{\mu_0 \mu_2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \mathbf{B}_0$ позначає наведений магнітний дипольний момент кулі.

91. Розв'язок шукаємо, використовуючи скалярний потенціал. Очевидно:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}) &= c_1 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}, & \text{при } r < R_1, \\ \psi_2(\mathbf{r}) &= c_2 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r} + c_3 \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \psi_3(\mathbf{r}) &= c_4 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r} + c_5 \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & \text{при } r > R_2, \end{aligned}$$

Використавши граничні умови

$$\begin{aligned} \psi(R_1) &= \psi_2(R_1), & \psi_2(R_1) &= \psi_3(R_2), \\ \mu_1 \psi_1'(R_1) &= \mu_1 \psi_3'(R_1), & \psi_3(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} &= -\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}. \end{aligned}$$

знаходимо нові п'ять сталих

$$c_1 = \frac{9\mu\mu_2 R_2^2}{z}, \quad c_2 = \frac{3\mu_2(\mu_1 + 2\mu_2)R_2^3}{z}, \quad c_3 = \frac{9\mu\mu_2 R_2^2}{z},$$

$$c_4 = -1, \quad c_5 = \frac{1}{z} R_2^3 (R_2^3 (\mu_1 + 2\mu)(\mu_2 - \mu) - R_1^3 (\mu_1 - \mu)(2\mu + \mu_2)),$$

де

$$z = 2R_1^3 (\mu_1 - \mu)(\mu_2 - \mu) - R_2^3 (\mu_1 + 2\mu)(\mu_2 + 2\mu).$$

Коли $\mu \rightarrow \infty$ поле всередині порожнини

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{9}{2} \frac{\mu_2}{\mu} \frac{R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} \mathbf{H}_0$$

спадає (магнітне екранування).

92. Оскільки $W = \frac{1}{2} L_{ij} I_i I_j$, а $L_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}$, то враховуючи задачу 84 отримаємо

$$L_{1,2} = 2\mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right].$$

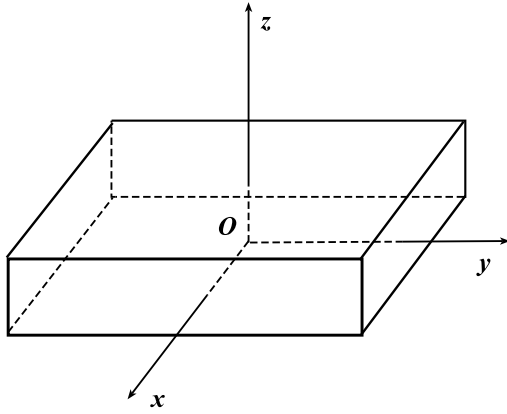


Рис. 5. До задачі 96

93. $L_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

94. $L = 4\pi\mu_0 \left(1 + 2 \ln \frac{d^2}{R_1 R_2} \right)$.

95. $L = \mu_0 \pi n^2 R^2$, при цьому поле усередині соленоїда $\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k}$, а зовні $\mathbf{B} = 0$.

96. Вибираємо вісь z перпендикулярно до пластин, вісь y — уздовж струму, а площину xy — по центру пластини (див. рис. 5). Із симетрії задачі випливає $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(z) = iH_x(z)$. Рівняння

$$H_x''(z) + k^2 H_x = 0$$

та $k = i\omega\mu_0\sigma$ має розв'язок $H_x(z) = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz$. З умови $\frac{I}{L} = \int_{-d/2}^{+d/2} j(z) dz$ і симетрії задачі випливає рівність

$$H_x(d/2) = -H_x(-d/2) = I/2L.$$

Тому

$$\mathbf{H} = i \frac{I}{2L} \frac{\sin \frac{kz}{2}}{\sin \frac{kd}{2}} e^{-i\omega t} = i \frac{I}{2L} \frac{\sin \frac{z}{2\delta} \operatorname{ch} \frac{z}{2\delta} + i \cos \frac{z}{2\delta} \operatorname{sh} \frac{z}{2\delta}}{\sin \frac{z}{2\delta} \operatorname{ch} \frac{z}{2\delta} + i \cos \frac{z}{2\delta} \operatorname{sh} \frac{z}{2\delta}} e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{j} \frac{I(1+i)}{4L\delta} \frac{\cos \frac{z}{2\delta} \operatorname{ch} \frac{z}{2\delta} - i \sin \frac{z}{2\delta} \operatorname{sh} \frac{z}{2\delta}}{\sin \frac{z}{2\delta} \operatorname{ch} \frac{z}{2\delta} + i \cos \frac{z}{2\delta} \operatorname{sh} \frac{z}{2\delta}} e^{-i\omega t},$$

де $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ — товщина скін-шару. Оскільки $d \gg \delta$, то при $z < d$

отримаємо

$$j_y(z) \simeq \frac{(1+i)I}{4L\delta} \exp\left(-\frac{d-z}{2\delta}\right) \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{d+z}{2\delta}\right)\right).$$

97. Виберемо вісь z уздовж проводу. Із симетрії задачі та рівнянь випливає, що $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e_\varphi H_\varphi(\rho)$, тому

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} \right) - \frac{H_\varphi}{\rho^2} \right] e_\varphi + k^2 H_\varphi e_\varphi = 0.$$

Граничні умови отримуємо із формули зв'язку $I = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k} dS$ і вимоги $H_\varphi(R) = \frac{I}{2\pi R}$. Розв'язок, скінченний при $r = 0$ має вигляд:

$$H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi R} \frac{J_1(k\rho)}{J_2(kR)} = \frac{I}{2\pi R} \frac{\text{ber}_1(\rho/\delta) + i \text{bei}_2(\rho/\delta)}{\text{ber}_1(R/\delta) + i \text{bei}_2(R/\delta)} e^{-i\omega t},$$

де $J_1(x)$ — функція Бесселя першого порядку першого роду,

$$k = \frac{1+i}{\delta}, \quad \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}.$$

За означенням $\text{Re } J_1(i^{3/2}x) = \text{ber}_1(x)$, $\text{Re } J_1(i^{3/2}x) = \text{bei}_1(x)$, тому

$$j_z(\rho) = \sigma E_z(\rho) = \frac{1}{\rho} (\rho H_\varphi(\rho)) = \frac{J_0(k\rho)}{J_1(k\rho)} e^{-i\omega t}.$$

Використовуючи асимптотику функцій Бесселя для $z \gg 1$,

$$J_m(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{mz}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right],$$

і те, що $R \gg \delta$, одержуємо при $\rho < R$:

$$j_z(\rho) = \frac{I(1-i)}{2\pi\delta\sqrt{R\rho}} \exp\left(-\frac{R-\rho}{\delta}\right) \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{R-\rho}{\delta}\right)\right].$$

98. Згідно із задачею 90, зовні кулі індукція магнітного поля має вигляд

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}), \quad (3.63)$$

де $\mathbf{m} = a\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ — наведений магнітний момент кулі з невідомою величиною a , $\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ — зовнішнє періодичне поле. Усередині кулі

поле задовольняє рівняння

$$\Delta \mathbf{B}_1 + k^2 \mathbf{B}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0,$$

де $k^2 = i\mu_0\omega\sigma$. Звідси $\mathbf{B}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ і $\operatorname{rot} (\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$ або $\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(\mathbf{r})$, де $\varphi(\mathbf{r})$ — деяка скалярна функція. Враховуючи градієнтну інваріантність, можна завжди вибрати $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ так, щоб новий вектор-потенціал задовольняв рівняння:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0,$$

що накладає обмеження на $\varphi(\mathbf{r})$. Калібровка Кулона дає змогу шукати $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ у вигляді $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r})$, де \mathbf{F} — деякий невідомий вектор. Оскільки в задачі є тільки один напрямок, заданий вектором \mathbf{B}_0 , то шукаємо $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 f(r)$, де $f(r)$ — сферично-симетрична функція. Тоді

$$\Delta f(r) + k^2 f(r) = 0,$$

і звідси скінченний розв'язок із сферичною симетрією

$$f(r) = C \frac{\sin kr}{r},$$

де $k = (1 + i)/\delta$, $\delta = (\mu_0\omega\sigma/2)^{-1/2}$ — товщина скін-шару, C — невідома константа. Отже

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} C \frac{\sin kr}{r} \right) = C \frac{e^{-i\omega t}}{r^3} (\mathbf{B}_0 (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \\ + \alpha^2 \sin \alpha) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0) (3 \sin \alpha - 3\alpha \sin \alpha - \alpha^2 \sin \alpha)), \end{aligned} \quad (3.64)$$

де $\alpha = kr$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. З граничних умов знаходимо сталі a та C :

$$a = \frac{-2\pi R^3}{\mu_0} \left(1 - \frac{3}{k^2 R^2} + 3 \frac{\operatorname{ctg} kr}{kr} \right), \quad C = \frac{3R^2}{2k^2 \sin kR}.$$

Разом з (3.63) та (3.64) вони визначають магнітне поле. При $\delta \gg R$ наведений дипольний момент

$$\mathbf{m} \simeq -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} V$$

у нульовому наближенні по δ/R залишається сталим, а поле все-

редині кулі при $r < R$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{3R}{2r} \left(\mathbf{B}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) \right) \exp \left[-\frac{(R-r)}{\delta} - i \left(\omega t - \frac{R-r}{\delta} \right) \right]$$

швидко спадає на поверхні.

99. Система правил Кірхгофа для двох індуктивно зв'язаних контурів має нетривіальні розв'язки, коли:

$$\omega_{1,2} = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm [4C_1 C_2 L_{12}^2 + (L_1 C_1 L_2 C_2)^2]^{1/2}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

100. Вибираємо вісь z уздовж \mathbf{H}_0 . Рівняння руху для моменту імпульсу має вигляд $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$, де \mathbf{N} — момент сили, тому

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mu_0 \gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}_r],$$

де γ — гіромагнітне відношення, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}$ — магнітний момент, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} e^{-i\omega t}$ — сумарне поле. Оскільки $h \ll H_0$ і $m \ll M_0$ то добутком $[\mathbf{m}, \mathbf{h}]$ знехтуємо. Згідно із задачею 90 має місце рівність $\mathbf{M}_0 = \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{H}_0$, тому рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \mu_0 \gamma [\mathbf{M}_0, \mathbf{h}(t)] + \mu_0 \gamma [\mathbf{H}_0, \mathbf{m}(t)].$$

Його розв'язок шукаємо у вигляді $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m} e^{-i\omega t}$. Це дає

$$m_x = \varkappa h_x - i\nu h_y, \quad m_y = i\nu h_x + \varkappa h_y, \quad m_z = 0.$$

де

$$\varkappa = \frac{\gamma \omega_0 \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \nu = \frac{\gamma \omega \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_0 = \mu_0 \gamma H_0.$$

При частоті $\omega = \omega_0$ спостерігається явище магнітного резонансу.

101. Випромінювання монохроматичне, довжина хвилі $\lambda < d$, тому

$$\frac{dP}{d\Omega} = k^2 \frac{c\mu_0}{2(4\pi)^2} \left| [\mathbf{n}, \mathbf{j}_\omega(\mathbf{k})] \right|^2,$$

де $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{k}) = \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} dV'$ — фур'є-образ густини струму, а $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}/c$ і $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Вибравши систему координат як показано на рис. 6, отримаємо:

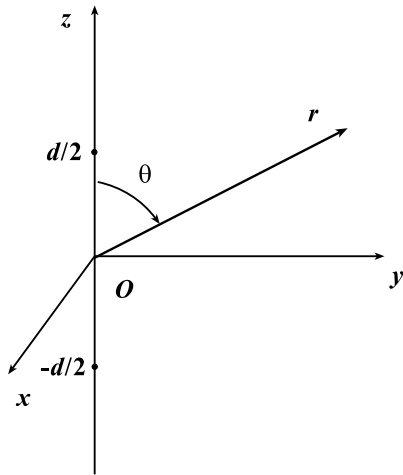


Рис. 6. До задачі 101

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_\omega(\mathbf{k}) &= e_3 I_0 \int_{-d/2}^{+d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}z \cos\theta\right) dz \\
 &= e_3 I_0 \frac{2 \cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta},
 \end{aligned}$$

тому

$$\frac{dP}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta} \right)^2.$$

Для окремих випадків n -півхвильових вібраторів, коли $kd = \pi n$, можна побудувати діаграми направленості випромінювання. Для цього будується графік $r(\theta)$, де $r = \frac{8\pi^2}{I_0^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{dP}{d\Omega}$ у полярних координатах.

а) $n = 1, \quad \lambda = 2d, \quad r(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta};$

б) $n = 2, \quad \lambda = d, \quad r(\theta) = \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta};$

$$\text{в) } n = 3, \quad \lambda = \frac{2}{3}d, \quad r(\theta) = \frac{\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta};$$

$$\text{г) } n = 4, \quad \lambda = \frac{1}{2}d, \quad r(\theta) = \frac{\sin^2(\pi\cos\theta)}{\sin^2\theta}.$$

102. Розподіл потужності по напрямкам:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0}{8\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[\frac{\sin\left(kd\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \right]^2,$$

при цьому враховано, що

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\cos kz + i \sin kz)I_0,$$

а також $R = 2P/I_0^2$:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{I_0^2}{8\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[\frac{\sin 2kd}{2kd} - 1 + \int_0^{kd} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \right].$$

103. $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, де

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

запізнювальний потенціал. Отже,

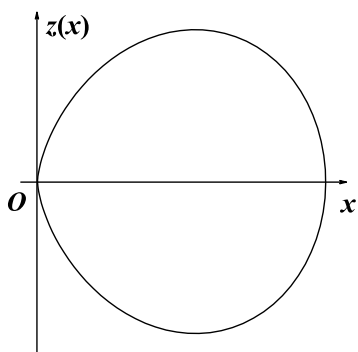
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\mu_0 \mathbf{i}_0}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[iq_x x' + iq_y y' - i\omega t]}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{1/2}} \times \\ & \times \exp[ik((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{1/2}] dx dy, \end{aligned}$$

і після заміни $x' = x + r' \cos \varphi'$, $y' = y + r' \sin \varphi'$, де r' та φ — нові полярні координати, використовуючи тотожність

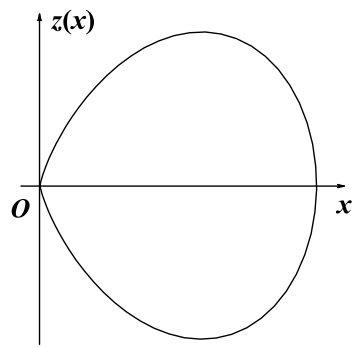
$$q_x \cos \varphi' + q_y \sin \varphi' = |q| \cos \left(\varphi' + \arctg \frac{q_y}{q_x} \right)$$

та інтегральне представлення функцій Бесселя

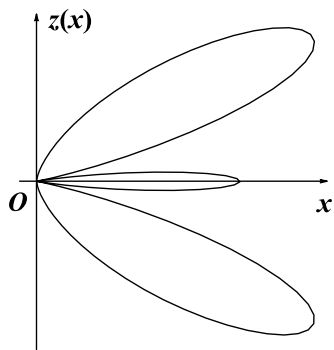
$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \cos \varphi) d\varphi,$$



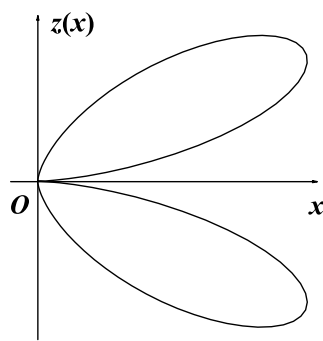
до задачі 102, а)



до задачі 102, б)



до задачі 102, в)



до задачі 102, г)

Рис. 7. Діаграми випромінювання

отримаємо

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \mathbf{i}_0}{2} e^{iq_x x + iq_y y - i\omega t} \int_0^\infty \frac{e^{ik\sqrt{r'^2 + z^2}}}{\sqrt{r'^2 + z^2}} r' J_0(qr') dr',$$

де $k = \frac{\omega}{c}$. Використовуючи формулу (Д6.13) додатку, одержимо:

а) при $q^2 < k^2$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\mu_0 \mathbf{i}_0}{2(k^2 - q^2)^{1/2}} \exp(iq_x x + iq_y y - i(k^2 - q^2)^{1/2} z - i\omega t),$$

тобто площина випромінює електромагнітні хвилі;

б) при $q^2 > k^2$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\mu_0 \mathbf{i}_0}{2(q^2 - k^2)^{1/2}} \exp(iq_x x + iq_y y - i(q^2 - k^2)^{1/2} |z| - i\omega t),$$

тобто поле є тільки поблизу площини. Тепер

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)],$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= i\mathbf{q}_x + \mathbf{j}\mathbf{q}_y - \mathbf{k}(k^2 - q^2)^{1/2} && \text{при } q^2 < k^2, \\ \mathbf{k} &= i\mathbf{q}_x + \mathbf{j}\mathbf{q}_y + \mathbf{k}(q^2 - k^2)^{1/2} && \text{при } q^2 > k^2. \end{aligned}$$

104. У системі центра мас:

$$\mathbf{P} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0,$$

оскільки $e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$.

105. Середня інтенсивність гармонічного дипольного випромінювання

$$P = \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Використовуючи рівняння руху знайдемо:

$$P = \frac{e^6}{192\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 a^4 m^2} = \frac{64\pi\epsilon_0}{3m^2 c^3 e^2} \equiv \gamma E^4,$$

де $E = T + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$ — енергія електрона в полі ядра. Тепер з

формули $P = -\frac{dE}{dt}$ знаходимо

$$\tau = \frac{1}{3\gamma|E|^3} = \frac{2\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3 a^3}{e^4} \simeq 1 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

106. Враховуючи задачу 29, а) і рівняння руху, одержимо

$$P = \frac{e^2 \omega_0^4 r_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega_0^2 E}{12\pi m \epsilon_0 c^3},$$

де $\omega_0 = \frac{e}{a(4\pi \epsilon_0 m a)^{1/2}}$ — частота коливань осцилятора, $E = m\omega^2 r_0^2$ — енергія осцилятора з амплітудою r_0 . Оскільки $P = -\frac{dE}{dt}$, то

$$E(t) = E(0)e^{-t/\tau}, \quad \text{де } \tau = \frac{48\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 a^3}{e^4} \simeq 1 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

Падіння на центр — асимптотичне.

107. Маємо

$$P = \frac{e^2 E^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m^2}, \quad E = -\int_0^T P(t) dt = -PT,$$

де T — час руху заряду через конденсатор, який визначається з рівняння

$$l = \frac{eE}{2m} T^2 + v_0 \cos(\alpha) T.$$

108. Дипольний момент $\mathbf{p} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}$, тому, використавши рівняння руху, маємо

$$P = \frac{2(e_1 e_2)^2}{(4\pi \epsilon_0)^3 3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4},$$

де μ — приведена маса. Усереднення за періодом замінюємо на усереднення вздовж траєкторії, тому:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P(\varphi) \frac{d\varphi}{(d\varphi/dt)} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P(\varphi) \frac{\mu r^2(\varphi)}{M} d\varphi,$$

де r залежить від кута φ :

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}.$$

Тут $p = a(1 - \varepsilon^2)$ — параметри орбіти, ε — ексцентриситет:

$$E = -\frac{\alpha}{2a}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{\mu\alpha^2}}, \quad \alpha = \frac{l_1 l_2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad T = \sqrt{\frac{\mu a^2}{\mu}}$$

а E та M — енергія та момент кількості руху.

$$\bar{P} = \frac{2}{3} \frac{\alpha^3}{l_1 l_2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{2 + \varepsilon^2}{2a^4(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}.$$

Для колової орбіти $\varepsilon = 0$, а оскільки $l_2 = -l_1 = l$, то одержуємо результат задачі 105.

109. Оскільки $d \ll \lambda$, то запізненням нехтуємо, тому $P = \frac{\ddot{\mathbf{p}}_1^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$, де

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t) + \varepsilon_0 \beta \mathbf{E}(\mathbf{d}, t) = \mathbf{p}(t) + \frac{\beta}{4\pi d^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}(t)) - \mathbf{p}(t)]$$

— сумарний дипольний момент системи, $\mathbf{n} = \mathbf{d}/d$. Отже,

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \left[\left(1 - \frac{\beta}{4\pi d^3} \right)^2 + \frac{\beta}{4\pi d^3} \left(2 + \frac{\beta}{4\pi d^3} \right) \cos^2 \alpha \right],$$

де α — кут між диполем $\mathbf{p}(t) = p_0 \cos \alpha$ та вектором \mathbf{d} . Найбільшою інтенсивність буде у випадку $\mathbf{p} \parallel \mathbf{d}$.

110. Згідно із задачею 54, система еквівалентна двом диполям у середовищі 1, де розміщено даний диполь, і одному диполю у середовищі 2. Тому, помістивши диполь у початок координат, отримуємо

$$\mathbf{H}_1 = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]}{4\pi c r} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{n}]}{4\pi c r_1}, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1 c^2 r}} + \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}_1, \mathbf{n}_1], \mathbf{n}_1]}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1 c^2 r_1}},$$

де $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - 2\mathbf{d}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_1/r_1$,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}_2, \mathbf{n}]}{4\pi c r}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}_2, \mathbf{n}], \mathbf{n}]}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1 c^2 r}}.$$

Із граничних умов $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = 0$, $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0$, де \mathbf{t} — орт дотичної до поверхні розділення $z = d$, знаходимо:

$$p_{1x,y} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} p_{x,y}, \quad p_{1z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} p_z, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \mathbf{p}.$$

111. З рівняння руху $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu_0 [\boldsymbol{\mu}, \mathbf{H}]$ знаходимо $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$ і тоді

$$P = \frac{\mu_0 \beta^4 H^4 \mu^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \sin^2 \theta_0.$$

$$112. P = \frac{Q^2 R^4 \omega_0^6 \psi_0^2}{300\pi\epsilon_0 c^5}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} \frac{Q\psi_0 \omega_0 R^2}{5} \cos \omega_0 t.$$

$$113. P = \frac{Q^6 R^4 H^4 \omega^2 \sin^2 \theta_0}{2400\pi\epsilon_0 m c^5}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} \frac{Q\psi_0 \omega R^2}{5}.$$

$$114. P_d = \frac{e^2 R^2 \omega^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} (1 + \cos \psi), \quad P_Q = \frac{8e^2 R^4 \omega^6}{5\pi\epsilon_0 c^5} \cos^2 \psi.$$

При $\psi \simeq \pi \pm 4\sqrt{\frac{3}{5}} \frac{R\omega}{c}$ інтенсивності електричного дипольного та квадрупольного випромінювання:

$$P_Q = \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta}}{720\pi\epsilon_0 c^5},$$

а квадрупольний момент системи:

$$Q_{\alpha\beta} = e^2 R^3 \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) & \frac{3}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) & 0 \\ \frac{3}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) & 1 - \frac{3}{2}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

де $\varphi_1 = 2\omega t$, $\varphi_2 = 2\omega t + 2\psi$.

115. Електричний дипольний момент має вигляд $\mathbf{p} = p(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t)$, тому $P = \frac{p^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$. Магнітний дипольний момент

$$\boldsymbol{\mu} = \lim_{d \rightarrow 0, ed \rightarrow \mathbf{p}} \frac{R}{2} \left(\left[\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}, \dot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\mathbf{d}}}{2} \right] + \left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}, \dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{d}}}{2} \right] \right) = pR\boldsymbol{\omega},$$

тому $\ddot{\boldsymbol{\mu}} = 0$ і $P_m = 0$. Квадрупольний момент обчислюємо спочатку у власній системі координат з віссю $z' \parallel \boldsymbol{\omega}$ і віссю $x' \parallel \mathbf{p}$, що дає

$$Q'_{\alpha\beta} = 2pR \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер одержуємо тензор квадрупольного моменту в нерухомій системі координат за правилом перетворення тензора $Q_{\alpha\beta} = L_{\alpha}^{\mu} L_{\beta}^{\nu} Q'_{\mu\nu}$,

де L_{β}^{α} — матриця поворотів навколо осі z :

$$L_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$Q_{\alpha\beta} = pR \begin{pmatrix} 1 + 3 \cos 2\omega t & 3 \sin 2\omega t & 0 \\ 3 \sin 2\omega t & 1 - 3 \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P_{\kappa\epsilon} = \frac{8R^2 p^2 \omega^6}{5\pi\epsilon_0 c^5}.$$

116. Виберемо напрямок осі z проти поля, а площину $y = 0$ сумістимо з площиною орбіти. Тоді перетворення Фур'є струму, з врахуванням умови $v/c \ll 1$, матиме вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{r}}(t) e^{i\omega t} dt = \mathbf{i} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 \sin \alpha e^{i\omega t} dt + \mathbf{k} \left[v_0 \cos \alpha \int_{-\infty}^{-T} e^{i\omega t} dt + \right. \\ & \left. + \int_{-T}^T \left(v_0 \cos \alpha - \frac{eE}{m}(t+T) \right) e^{i\omega t} dt - v_0 \sin \alpha \int_T^{\infty} e^{i\omega t} dt \right], \end{aligned}$$

де $v_z = 0$ при $t = 0$. Знаходимо, що

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = i v_0 \delta(\omega) \sin \alpha - 2i_0 \mathbf{k} \frac{e^2 E}{m\omega^2} \sin \omega T,$$

тому

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2E^2 e^4}{3\pi^2 \epsilon_0 c^3 m \omega^2} \sin^2 \left(\frac{mv_0 \omega \cos \alpha}{eE} \right).$$

117. Вісь z виберемо вздовж руху частинок, а момент $t = 0$ при мінімальній відстані. У системі центра мас рівняння руху має вигляд

$$\frac{\mu \dot{z}_p^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 z_p} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 d},$$

а густина струму

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_3 \left[\frac{e_1 m_2}{M} \dot{z}_p(t) \delta \left(z - \frac{m_2}{M} z_p(t) \right) - \frac{e_2 m_1}{M} \dot{z}_p(t) \delta \left(z + \frac{m_1}{M} z_p(t) \right) \right],$$

де $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ — приведена маса, $M = m_1 + m_2$. Розв'язок рівняння

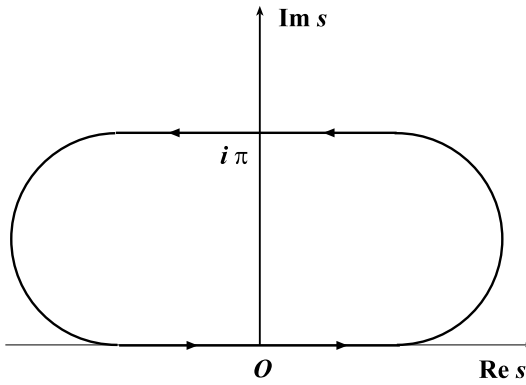


Рис. 8. До задачі 117

руху має параметричний вигляд:

$$t(s) = \frac{1}{\omega_0}(s + \operatorname{sh} s), \quad z_p(s) = d \operatorname{ch} \frac{2s}{2}, \quad \text{де } \omega_0 = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{e_1 e_2}{2\pi \epsilon_0 \mu d}} \equiv \frac{2v_1}{d}.$$

Фур'є-образ струму в нерелятивістському наближенні $v_0/c \ll 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= e_3 \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{z}_p e^{i\omega t} dt = \\ &= e_3 \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_0^{\infty} \operatorname{sh} s \sin(\nu(s + \operatorname{sh} s)) ds, \end{aligned}$$

де $\nu = \omega/\omega_0$. Отже

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{\omega^2 \mu^2 d^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left| I\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2,$$

де $I(\nu) = \int_0^{\infty} \operatorname{sh} s \sin[\nu(s + \operatorname{sh} s)] ds$. Цей інтеграл можна представити через функції Ганкеля для довільних значень ν . Дослідимо його при $\nu \ll 1$. Інтегруючи один раз частинами інтеграл

$$J_\alpha(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \operatorname{sh} s \sin(\nu(s + \operatorname{sh} s)) ds,$$

отримаємо як границю

$$I(\nu) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\nu) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty \frac{\cos \nu(s + \operatorname{sh} s)}{1 + \operatorname{ch} s} ds.$$

Тоді при $\nu \ll 1$

$$I(\nu) \simeq \frac{1}{\nu} \int_0^\infty \frac{ds}{1 + \operatorname{ch} s} = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty \frac{d(s/2)}{\operatorname{ch}^2(s/2)} = \frac{1}{\nu},$$

звідки

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{\mu e_1 e_2}{3\pi^3 \varepsilon_0^2 d c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2,$$

тобто енергія випромінювання на малих частотах при лобовому зіткненні однойменних частинок залишається сталою.

Для дослідження випадку $\omega \gg \omega_0$ знайдемо інтеграл

$$\frac{1}{2i} \oint_C \operatorname{sh} s e^{i\nu(s + \operatorname{sh} s)} ds$$

по контуру C у комплексній площині, який показаний на рис. 8. Оскільки всередині контуру підінтегральна функція аналітична, то

$$\frac{1}{2i} \oint_C \operatorname{sh} s e^{i\nu(s + \operatorname{sh} s)} ds = 0.$$

Це дає

$$I(\nu) = i \frac{e^{-\pi\nu}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} s e^{-i\nu(s + \operatorname{sh} s)} ds.$$

Звідси видно, що при $\nu \gg 1$ основний внесок в інтеграл дає область $|s| < 1$. Тому

$$I(\nu) \simeq i \frac{e^{-\pi\nu}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s \exp\left(i\nu \frac{s^3}{6}\right) ds = i e^{-\pi\nu} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3} \frac{1}{2\sqrt{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

отже, спектральний розклад енергії має вигляд

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{e_1 e_2 \mu \Gamma^2(2/3)}{6^{2/3} \pi^3 \varepsilon_0^2 c^3 d} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} e^{-2\pi\omega/\omega_0},$$

звідки випливає, що на високих частотах енергія випромінювання швидко спадає.

118. Аналогічно попередній задачі

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = -e_3 \frac{\mu e_1 \omega d^2 \cos \theta}{4m_1 c} i \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sh } s (1 + \text{ch } s) e^{i\nu(s + \text{sh } s)} ds.$$

При $\nu \gg 1$ отримуємо тим же способом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = e_3 i \frac{6^{1/3} \sqrt{3} \Gamma(4/3) \mu e_1 d^2 \omega_0 \cos \theta}{4m_1 c} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/3} e^{-\pi\omega/\omega_0},$$

після інтегрування за всім тілесним кутом знаходимо

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{6^{2/3} \Gamma^2(4/3) (e_1^2 e_2)^2}{40\pi^4 \varepsilon_0^3 m_1^2 d^2 c^5} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{4/3} e^{-2\pi\omega/\omega_0},$$

звідки видно, що на високих частотах енергія випромінювання швидко спадає.

При $\nu \ll 1$ основний внесок в інтеграл дає область, де має місце $\nu(s + \text{sh } s) \gg 1$, або ж $s \gg 1$, тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sh } s (1 + \text{ch } s) e^{i\nu(s + \text{sh } s)} ds \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sh } s \text{ch } s e^{i\nu \text{sh } s} ds = \frac{2}{\nu^2}.$$

Отже, на низьких частотах енергія випромінювання

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{(e_1^2 e_2)^2}{120\pi^4 \varepsilon_0^3 m_1 d^2 c^5}$$

залишається сталою, як і в попередньому випадку.

119. Згідно із задачею 117, у нерелятивістському наближенні

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= e_3 \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_0^{\infty} \dot{z}_p(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= e_3 \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{d}{2} \int_0^{\infty} \text{sh } s e^{i\nu(s + \text{sh } s)} ds. \end{aligned}$$

Для малих частот $\nu \ll 1$, аналогічно з задачею 117

$$\int_0^{\infty} \text{sh } s e^{i(s+\text{sh } s)} ds \simeq \frac{i}{\nu}$$

і спектральний розподіл енергії такий як і при лобовому зіткненні

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e_1 e_2 \mu}{3\pi^2 \varepsilon_0^2 d c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

Для високих частот $\nu \gg 1$ одержуємо

$$\int_0^{\infty} e^{i\nu(s+\text{sh } s)} ds = -e^{-\pi\nu} \int_0^{\infty} \text{sh } s e^{-i\nu(s-\text{sh } s)} ds - \int_0^{\pi} \sin y e^{-\nu(y+\sin y)} dy \simeq \frac{1}{2\nu}$$

і тому

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{e_1 e_2 \mu}{192\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2.$$

Звідси видно, що при розпаді ядра спектральна густина випромінювання спадає з частотою повільніше, ніж при зіткненні частинок.

120. Для дипольного випромінювання

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 [\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]}{4\pi r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}],$$

де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — орт напрямку на точку спостереження з диполя. Звідси видно, що хвилі поперечні, тобто $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{E}$. Вектор дипольного моменту $\mathbf{p}(t - r/c)$ напрямлений на заряд і обертається разом з ним, тому

$$\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -e\omega^2 R \mathbf{e}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

де орт напрямку \mathbf{e} має такі компоненти:

$$e_x = \cos(\omega t'), \quad e_y = \sin(\omega t'), \quad e_z = 0, \quad t' = t - \frac{r}{c}.$$

У точці спостереження будемо базис з ортів:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{n}]}{\sin \theta}, \quad \mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{n}],$$

тоді рівняння рівняння магнітного поля для цього базису:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3 = \frac{e\omega^2 R}{4\pi R} [e_2 \cos \theta \cos(\omega t' - \varphi) - e_3 \sin(\omega t' - \varphi)].$$

Звідси видно, що вектор поляризації магнітного поля

$$\mathbf{e}_B = B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3 = e_2 \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} + e_3 \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$$

задає еліптично поляризовану хвилю в загальному випадку кута θ , а при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$ матиме місце колова поляризація. При $\theta < \pi/2$ хвилі поляризовані за годинниковою стрілкою, при $\theta > \pi/2$ — проти, а при $\theta = \pi/2$ поляризація лінійна.

121. Повністю аналогічно до попередньої задачі отримуємо

$$\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -e\omega^2 R \mathbf{k} \cos(\omega t - kr),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 e \omega^2 R \cos(\omega t - kr)}{4\pi r} [\mathbf{k}, \mathbf{r}] = B_0 \mathbf{e}_z,$$

тобто хвилі лінійно поляризовані завжди.

122. Лінійно поляризована.

123. Після обчислень маємо:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{r_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

де $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}$ — класичний радіус електрона, $\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}$ — коефіцієнт променевого тертя, θ — кут між вектором \mathbf{E} и напрямком на точку спостереження, I_0 — інтенсивність падаючої хвилі.

124. З рівняння руху знаходимо:

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = -\mu_0 \beta [\boldsymbol{\mu}, \dot{\mathbf{H}}] + \mu_0^2 \beta^2 [\mathbf{H}, [\mathbf{H}, \boldsymbol{\mu}]],$$

тому розсіяння буде відбуватись на двох частотах — на частоті хвилі та на подвоєній частоті.

$$\frac{d\sigma(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{P(\omega)}{d\Omega} = \left(\frac{\beta \mu \omega \sin \alpha}{c^4} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0^2}, \quad \sigma = \frac{1}{6\pi \epsilon_0^2} \frac{\beta \mu \omega \sin \alpha}{c^4},$$

$$\frac{d\sigma(2\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{P(2\omega)}{d\Omega} = \left(\frac{\beta^2 \mu H_0 \sin \alpha}{c^6} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \theta}{64\pi^2 \epsilon_0^4}, \quad \sigma = \frac{\beta^2 \mu H_0 \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0^4 c^6},$$

де α — кут між векторами $\boldsymbol{\mu}$ та \mathbf{H}_0 , а θ — кут між вектором \mathbf{H}_0

і напрямком на точку спостереження.

125. Направляємо вісь z уздовж осі циліндра, а вісь x — уздовж хвильового вектора \mathbf{k} . Тоді

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z H_0 e^{-i(\omega t - k\rho \cos \varphi)} = \mathbf{e}_z H_0 e^{-i(\omega t - k\rho \cos \varphi)},$$

де ρ та φ — циліндричні координати. Розкладаємо поле в ряд Фур'є за кутом φ :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z H_0 e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\varphi} = \mathbf{e}_z H_0 e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\rho k) e^{im\varphi}.$$

Знайдена хвиля, з врахуванням симетрії задачі, може мати компоненту магнітного поля також уздовж осі циліндра. Вона існуватиме в області, де $\rho \neq 0$, тому її можна розкласти в ряд за функціями Бесселя першого та другого родів, або за функціями Ганкеля першого або другого родів. Отже, взявши функції Ганкеля першого роду,

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z H_0 e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\varphi},$$

де b_m — невідомі коефіцієнти. Оскільки циліндр є ідеальним провідником і його поверхневі заряди і струм — невідомі, тобто $B_n = 0$ і $E_\varphi = 0$. Остання умова дає

$$b_m = -i^m \frac{J_m'(kR)}{H_m^{(1)'}(kR)},$$

де штрихом позначена похідна за аргументом. Отже,

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_z H_0 e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J_m'(kR)}{H_m^{(1)'}(kR)} H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\varphi},$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\mathbf{e}_\varphi}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\partial H_z'}{\partial \rho} = \frac{ikH_0 \mathbf{e}_\varphi}{\varepsilon \omega} e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m J_m'(kR)}{H_m^{(1)'}(kR)} H_m^{(1)'}(k\rho) e^{im\varphi}.$$

Інтенсивність виродження розсіяної хвилі на одиницю довжини циліндра буде мати вигляд:

$$I = \int_0^{2\pi} |\mathbf{\Pi}| \rho d\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E_\varphi \cdot H_z^* \rho d\varphi = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0^2 \frac{1}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{J_m'(kR)}{H_m^{(1)'}(kR)} \right|.$$

Тут використана асимптотика функцій Ганкеля за великих значень аргументу:

$$H_m^{(1)} \simeq \frac{2}{\pi x} e^{i(x-(2m+1)\pi/4)}.$$

126. Виходячи з перетворень повороту ортів

$$\mathbf{e}_0' = a_{00}\mathbf{e}_0 + a_{01}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1' = a_{10}\mathbf{e}_0 + a_{11}\mathbf{e}_1,$$

та умови $\mathbf{e}_0' \cdot \mathbf{e}_1' = 0$, одержимо $\frac{a_{01}}{a_{00}} = \frac{a_{10}}{a_{11}} = -\beta$. Умови ортогональності $\mathbf{e}_0' \cdot \mathbf{e}_0' = -1$, $\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1' = 1$ приводять до такої матриці

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix},$$

де знаки в одному рядку беруться однаковими. Поворот без інверсії відповідає знаку “+” в обох рядках.

127. Припущення а) – є) дають таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \text{а), б)} & \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t, & z' = z \\ t' = a_{21}x + a_{22}t, & y' = y; \end{cases} \\ \text{в)} & \begin{cases} x = (a_{22}x' - a_{12}t')/\Delta(v) = a_{11}(-v)x' + a_{12}(-v)t', & y' = y \\ t = (-a_{12}x' + a_{11}t')/\Delta(v) = a_{21}(-v)x' + a_{22}(-v)t', & z' = z; \end{cases} \\ \text{г)} & \begin{cases} -x' = -a_{11}(-v)x + a_{12}(-v)t, \\ t' = -a_{21}(-v)x + a_{22}(-v)t; \end{cases} \\ \text{д)} & u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{11}u + a_{12}}{a_{21}u + a_{22}}, \quad 0 = \frac{a_{11}v + a_{12}}{a_{21}v + a_{22}}, \\ \text{є)} & c = \frac{a_{11}c + a_{12}}{a_{21}c + a_{22}}, \end{aligned}$$

де $\Delta(v) = a_{11}(v)a_{22}(v) - a_{21}(v)a_{12}(v)$. З системи в) отримаємо

$$\begin{aligned} a_{11}(-v) &= \frac{a_{22}(v)}{\Delta(v)}, & a_{22}(-v) &= \frac{a_{11}(v)}{\Delta(v)}, \\ a_{12}(-v) &= -\frac{a_{12}(v)}{\Delta(v)}, & a_{21}(-v) &= -\frac{a_{21}(v)}{\Delta(v)}, \end{aligned}$$

що після підстановки в г) дає:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_{22}(v)}{\Delta(v)} x + \frac{a_{12}(v)}{\Delta(v)} t, \\ x' = \frac{a_{21}(v)}{\Delta(v)} x + \frac{a_{11}(v)}{\Delta(v)} t. \end{cases}$$

Звідси, порівнюючи з системами а) та б), отримуємо

$$\Delta(v) = 1, \quad a_{11}(v) = a_{22}(v) = \gamma.$$

З рівняння д) випливає $a_{12} = -\gamma v$, а з е) $-a_{21} = -v\gamma/c^2$. Отже, $a_{12} = \gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$ і тому

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad a_{12} = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad a_{21} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Для координати $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ матриця перетворень $x^\alpha = L_\beta^\alpha(v)x'^\beta$ набуває вигляду

$$L_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

$$128. \quad x^\alpha = L_\beta^\alpha(v_1)x'^\beta = L_\beta^\alpha(v_1)L_\gamma^\beta(v_2)x''^\gamma;$$

$$x^\alpha = L_\beta^\alpha(v_2)x'^\beta = L_\beta^\alpha(v_2)L_\gamma^\beta(v_1)x''^\gamma.$$

Матриці симетричні, тому комутують. Легко довести безпосередньо, що $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 - \beta_1\beta_2}$, а $\gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}$.

129. Фронт світлової сферичної хвилі повинен бути однаковим в лабораторній системі координат $Oxyz$

$$r^2 = c^2 t^2, \quad (3.65)$$

та у системі $O'x'y'z'$, яка рухається зі швидкістю \mathbf{v} відносно нерухомої

$$r'^2 = c^2 t'^2. \quad (3.66)$$

Перейдемо до координат Галілея $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{v}t$, $t = T$. Тоді рівняння (3.65) набуває вигляду

$$R^2 + 2T\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = c^2 T^2 (1 - \beta^2)$$

або

$$c^2 \left(T\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = \mathbf{R}^2 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2(1-\beta^2)}. \quad (3.67)$$

Перетворимо праву частину цієї рівності

$$\mathbf{R}^2 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2(1-\beta^2)} = \mathbf{R}^2 + \left(\frac{\mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{v} \right)^2 \frac{1}{c^2(1-\beta^2)} \equiv \left(\mathbf{R} + \alpha(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{v} \right)^2,$$

де α — деякий невідомий коефіцієнт, який можна знайти, розкриваючи квадрат і прирівнюючи ліву та праву частини:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Якщо тепер ввести

$$t' = T\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{v^2},$$

то (3.67) набуває необхідного вигляду $c^2 t'^2 = (\mathbf{r}')^2$. Отже,

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} \right), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{v^2} - \gamma \mathbf{v} t.$$

Матриця перетворень Лоренца матиме вигляд:

$$L_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_2 & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ \gamma\beta_3 & (\gamma - 1)\frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix},$$

де $\beta_i = v_i/c$, $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

130. $\operatorname{tg} \theta = \frac{u' \sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{v + u' \cos \theta'}$, де θ' — кут між вектором швидкості частинки \mathbf{u} та швидкістю \mathbf{v} .

131. $A^{\mu} = L_{\nu}^{\mu} A'^{\nu}$, де A'^{μ} — чотири-потенціал у власній системі заряду, тобто $A'^{\nu} = (\varphi, 0)$, тому $A^{\mu} = (\gamma\varphi, \beta\gamma\varphi, 0, 0)$.

132. а) $N = n^k$;

б) для симетричного за s індексами тензора незалежними будуть по-перше: $n^{(k-s)}$ компонент за несиметричними індексами, а по-друге — ті елементи, які можна вибрати з n елементів по s штук, кожен раз повертаючи вибраний елемент назад. Ці перетворення дають можливість вибрати елементи з однаковими індексами. Отже,

$$N_s = n^{k-s} C_{n+s-1}^s = n^{k-s} \frac{(n+s-1)!}{s!(n-1)!};$$

в) для антисиметричного за a індексами тензора елементи з однаковими індексами рівні нулю, тому вибірка проводиться без повернень, а значить:

$$N_a = n^{k-a} \frac{n!}{a!(n-a)!}.$$

При $a = k = n$, $N_a = 1$.

133. $T_{\alpha\beta} x^\beta = \lambda g_{\alpha\beta} x^\beta$ і $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) x^\beta = 0$, де $g_{\alpha\beta}$ — метричний тензор. Власні числа є розв'язками рівняння $\det |T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}| = 0$, а коефіцієнти цього рівняння є інваріантами тензора $T_{\alpha\beta}$.

а) $\det |F_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}| = -\lambda^4 - \lambda^2(c^2 B^2 - E^2) + c^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 = 0$, тому інваріанти тензора будуть $I_1 = -E^2 + c^2 B^2$, $I_2 = c^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$, а власні значення

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(E^2 - c^2 B^2 \pm \frac{2}{\varepsilon_0} \sqrt{\omega^2 - \frac{\Pi^2}{c^2}} \right),$$

де $\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + c^2 B^2)$ — густина енергії, $\mathbf{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 [\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ — вектор Умова-Пойтинга.

134. $\gamma \mathbf{j}_{\parallel} = \sigma \mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{j}_{\perp} = \sigma \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}_{\perp}])$, де $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор, \mathbf{A}_{\parallel} — вектор, паралельний до швидкості \mathbf{v} , \mathbf{A}_{\perp} — перпендикулярний до \mathbf{v} . При $v/c \ll 1$

$$\mathbf{j} \simeq (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]).$$

135. Виберемо осі нерухомої системи координат так, як вказано на рис. 9. У цій системі

$$\cos^2 \alpha = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{E^2 B^2} = \frac{I_2}{c^2 E^2 B^2} = \frac{I_2}{(I_1 + E^2) E^2},$$

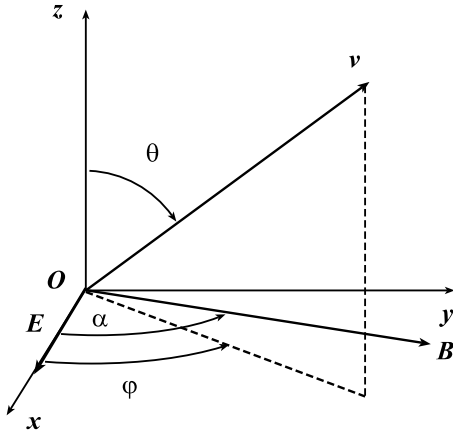


Рис. 9. До задачі 135

де I_1 та I_2 — перший і другий інваріанти електромагнітного поля. Аналогічно

$$\cos^2 \alpha' = \frac{I_2}{(I_1 + E'^2)E'^2} = \cos^2 \alpha \frac{c^2 E^2 B^2}{(c^2 B^2 - E^2 + E'^2)E^2}. \quad (3.68)$$

Очевидно, що при $\alpha = \pi/2$ обов'язково і $\alpha' = \pi/2$, оскільки $I_2 = 0$.

Якщо $\alpha' \neq \pi/2$, то згідно з $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{e}, \mathbf{B}, \mathbf{v})$ і з (3.68) можна знайти \mathbf{v} . Використовуючи рис. 9 і перетворення Лоренца для поля можна знайти, що

$$E'^2 = E^2(\gamma + (1 - \gamma^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + c^2 B^2 \gamma^2 \beta^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \alpha)) - 2cEB\gamma^2 \beta \cos \theta \sin \theta.$$

Після підстановки в (3.68) можна знайти \mathbf{v} як функцію \mathbf{E} , \mathbf{E}' , α та α' . Розглянемо випадок $\alpha = 0$ і $\theta = 0$. Тоді

$$\cos^2 \alpha' = \frac{c^2 B^2 E^2}{(c^2 B^2 - E^2 + \gamma^2 E^2 + c^2 B^2 \gamma^2 \beta^2)(E^2 + c^2 \beta^2 B^2) \gamma^2}.$$

Після перетворень отримаємо такий вираз для швидкості:

$$\frac{\beta}{1 - \beta^2} = \operatorname{tg} \alpha' \frac{cBE}{c^2 B^2 + E^2}.$$

Отже, якщо в системі $Oxyz$ має місце $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$, то в системі $Ox'y'z'$, яка рухається перпендикулярно до цих векторів із знайденою ви-

ще швидкістю кут між векторами буде α' , і навпаки.

136. У власній системі координат закони відбивання світла мають вигляд: $\omega = \omega'$, $k'_x = -k'_{x1}$, $k'_y = k'_{y1}$, $k'_z = k'_{z1}$, де індекс 1 позначає відбитий промінь, а нормаль до дзеркала напрямлена уздовж осі $O'x'$. Перетворюючи за Лоренцем хвильові 4-вектори падаючої та відбитої хвиль, отримаємо

$$\omega_1 = \omega \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta}{1 - \beta^2}, \quad \frac{k_{1x}}{|k_1|} = \cos \theta_1 \frac{2\beta - (1 + \beta^2) \cos \theta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta}.$$

137. Використовуємо закон збереження 4-імпульса.

а) $P_e^\mu + P_{ph}^\mu = P_e'^\mu + P_{ph}'^\mu$, $P^\mu = (E/c, \mathbf{p})$, де індекси e та ph відносяться до електрона та фотона, штрих позначає 4-імпульс після розсіяння, E — енергія, P — релятивістський імпульс. У початковому стані

$$P_e^\mu = (m_e c, \mathbf{0}), \quad P_e'^\mu = (\hbar \omega / c, \hbar \mathbf{k}),$$

причому $k = |\mathbf{k}| = \omega / c$, а в кінцевому

$$P_e'^\mu = (\gamma m_e c, \gamma m_e \mathbf{v}), \quad P_e'^\mu = (\hbar \omega' / c, \hbar \mathbf{k}'),$$

де $k' = |\mathbf{k}'| = \omega' / c$. Тому $(P_e^\mu + P_{ph}^\mu - P_e'^\mu)^2 = (P_{ph}^\mu)^2$, звідки знаходимо:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos \theta),$$

де $\lambda_0 = \frac{2\pi \hbar}{m_e c} \simeq 2.426 \cdot 10^{-12}$ м — комптонівська довжина хвилі електрона;

б) для поглинання фотона $P_e^\mu + P_{ph}^\mu = P_e'^\mu$, а для випромінювання фотона $P_e'^\mu = P_e^\mu + P_{ph}^\mu$, причому в обох випадках $P_e^\mu = (m_e c, \mathbf{0})$. Аналогічно задачі а) знаходимо $\omega = \omega' = 0$, тобто фотона немає;

в) аналогічно а) та б): $P_k^\mu = P_k'^\mu + P_{ph}^\mu$, де $P_k^\mu = (Mc + \frac{\Delta E}{c}, \mathbf{0})$, $P_{ph}^\mu = (\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \mathbf{k})$, $P_k'^\mu = (\gamma M c, \gamma M \mathbf{v})$. Звідси

$$\omega = \frac{c}{\hbar} \frac{(Mc + \Delta E / c)^2 - M^2 c^2}{2(Mc + \Delta E / c)}.$$

Якщо енергія збудження мала, тобто $\Delta E \ll M c^2$, то отримаємо

$$\omega \simeq \frac{\Delta E}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta E}{2M c^2} \right);$$

г) $P_p^\mu + P_{ph}^\mu = P_p'^\mu + P_\pi^\mu$, де $P_p'^\mu = m_p(\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, $P_{ph}^\mu = \left(\frac{E_{ph}}{c}, \frac{E_{ph}}{c} \mathbf{n}\right)$, а реакція почнеться тоді, коли $P_p'^\mu = (m_p c, \mathbf{0})$, $P_\pi^\mu = (m_\pi c, \mathbf{0})$. Звідси знаходимо $2m_p \gamma E_{ph}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) = m_\pi^2 c^2 + 2m_p m_\pi c^2$. Оскільки енергія протона буде релятивістською, то $\beta \simeq 1$, а найменша енергія реакції буде при лобовому зіткненні протона з фотоном, тому $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \simeq 2$. Отримаємо

$$E_{\text{порог}} = \gamma m_p c^2 = \frac{(m_\pi c^2)^2 + 2m_p m_\pi c^4}{4E_{ph}} \simeq 2.5 \cdot 10^{20} \text{ еВ}.$$

138. У лабораторній системі координат, де ядро нерухоме, електромагнітне поле матиме вигляд

$$\mathbf{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = 0,$$

а 4-вектор сили у власній системі нейтрона $F'^\mu = (0, \nabla'(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}'))$, причому $\mathbf{B}' = -\frac{\gamma}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{E}]$. У лабораторній системі координат 4-вектор сили буде $F^\mu = L_\nu^\mu F'^\nu$ або $F^\mu = (\beta\gamma F'_x, \gamma F'_x, F'_y, F'_z)$, а оскільки

$$\nabla'^\mu = L_\nu^\mu(-v)\nabla^\nu = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \beta\gamma \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\beta\gamma}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

то

$$F'^\mu = \left(\beta\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x}, \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-\frac{\gamma}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{m}, \mathbf{v}]\right).$$

У наближенні порядку v/c включно

$$F^\mu = \left(0, \frac{([\mathbf{v}, \mathbf{m}] \cdot \nabla)}{c^2} \mathbf{E}\right),$$

тобто сила така сама, як і прикладена до електричного диполя величиною $\mathbf{p} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}, \mathbf{m}]$.

139. $P_M^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu$, $P_M^\mu = (Mc, \mathbf{0})$, $P_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1)$, $P_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2)$, тому $m_2^2 c^2 = M^2 c^2 + m_1^2 - 2McE_1$ і

$$E_1 = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = c^2 \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M},$$

$$T_\mu = E_\mu - m_\mu c^2 = 4.1 \text{ Мев}, \quad T_\nu = E_\nu - 0 = 29.8 \text{ Мев}.$$

140. Рівняння руху $\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$, де $P^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, $F^\mu = (0, e\gamma[\mathbf{v}, \mathbf{B}])$ зводиться до таких виразів:

$$\gamma mc^2 = E = \text{const}, \quad m \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Враховавши, що $\gamma = \frac{E}{mc^2}$ — стала, отримаємо

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\mathbf{v}, \frac{ec^2 \mathbf{B}}{E} \right] \equiv [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B],$$

де $\boldsymbol{\omega}_B = \frac{ec^2 \mathbf{B}}{E}$ — релятивістська циклотронна частота. При малих енергіях частинки $E \ll mc^2$ отримуємо класичний вираз $\boldsymbol{\omega}_B = \frac{e\mathbf{B}}{m}$. У системі координат з віссю $Oz \parallel \mathbf{B}$ розв'язок має вигляд

$$x = x_0 + R \sin(\omega_B t + \alpha), \quad y = y_0 + R \cos(\omega_B t + \alpha), \quad z = z_0 + v_{z0} t,$$

причому $\omega_B^2 R^2 + v_{z0}^2 = v_0^2$, де v_0 — модуль швидкості частинки, а v_{z0} — z -компонента швидкості. Отже, траєкторія буде спіраллю, як і для класичного випадку.

141. Функція Гамільтона $H = \gamma mc^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = E$ і звідси отримуємо, враховавши, що при $t = 0$ має місце $x = 0$:

$$ct = \int_0^x \frac{\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) dx}{\left[\left(E - mc^2 - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \left(E + mc^2 - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \right]^{1/2}}.$$

Підстановка $x = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{2(E - mc^2)/m} \sin \varphi$ зводить інтеграл до вигляду

$$\begin{aligned} \omega_0 t &= \sqrt{\frac{2mc^2}{E + mc^2}} \left[\left(1 + \frac{E}{mc^2} E(k, \varphi) \right) - K(k, \varphi) \right] = \\ &= \sqrt{1 - k^2} \left[\frac{2}{1 - k^2} E(k, \varphi) - K(k, \varphi) \right], \end{aligned}$$

де

$$K(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

є неповними еліптичними інтегралами першого та другого родів відповідно, а $k^2 = \frac{E-mc^2}{E+mc^2} < 1$.

У нерелятивістському випадку

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} + U \simeq mc^2 + T + U = mc^2 + W,$$

де T , U та W — кінетична, потенціальна та повна нерелятивістські енергії, тобто $W \ll mc^2$. Оскільки $k^2 \simeq \frac{W}{2mc^2} \ll 1$, а еліптичні інтеграли $K(0, \varphi) = E(0, \varphi) = \varphi$, то отримуємо $\omega_0 t = \varphi$, або ж

$$x = \sqrt{\frac{2W}{m\omega_0^2}} \sin \omega_0 t,$$

що повністю збігається з класичним результатом.

У ультрарелятивістському випадку $E \gg mc^2$, тоді наближено запишемо $k^2 \simeq 1 - 2mc^2/E$. Якщо покласти $k^2 = 1$, то інтеграл $K(1, \varphi)$ не розходиться і його можна знайти при $\varphi < \pi/2$, тобто при рухові далеко від точки повороту:

$$E(1, \varphi) = \sin \varphi, \quad K(1, \varphi) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Відкидаючи доданки порядку mc^2/E і вище, отримуємо

$$\omega_0 t = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \sin \varphi,$$

звідки $x \simeq ct$, тобто осцилятор рухається зі швидкістю світла. Поблизу точки повороту $\varphi \simeq \pi/2$, тому треба врахувати точне значення k^2 . Зробимо заміну $\varphi = \pi/2 + \chi$ і після перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega_0 t = \sqrt{\frac{2mc^2}{E+mc^2}} \left[\left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) \left(E(k, \pi/2) + \int_0^\chi \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right) + \right. \\ \left. + K(k, \pi/2) - \int_0^\chi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки $\chi \ll 1$, то

$$\int_0^\chi \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \simeq \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \chi, \quad \int_0^\chi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \simeq \sqrt{\frac{E}{2mc^2}} \chi.$$

Для повних еліптичних інтегралів при $k \rightarrow 1$ справедливо

$$\lim_{k \rightarrow 1} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 1} K\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-k^2}.$$

Тому поблизу точки повороту, відкинувши доданки порядку mc^2/E , отримаємо

$$\omega_0 t \simeq \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \left(1 - \frac{mc^2}{2E} \ln \frac{8E}{mc^2} + \sqrt{\frac{mc^2}{2E}} \chi \right)$$

або

$$x = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \omega_0 t - \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} + \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \ln \frac{8E}{mc^2} \right).$$

Звідси видно, що координата x набуває першого максимального значення в момент часу

$$t_m = \frac{1}{\omega_0} \left(\sqrt{\frac{2E}{mc^2}} - \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \ln \frac{8E}{mc^2} \right),$$

який не дорівнює класичному моменту повороту $t_n = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0}$. Легко бачити, що

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega_0(t - t_m)),$$

при $t < t_m$ швидкість змінює знак. Це наближення гірше для таких значеннях $t - t_m$, коли

$$\sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \sin \omega_0(t - t_m) \simeq \omega_0(t - t_m) \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \ll 1.$$

Для періоду релятивістського осцилятора отримуємо

$$T_{rel} = 4t_m = \frac{2}{\pi} T \left(\sqrt{\frac{2E}{mc^2}} - \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \ln \frac{8E}{mc^2} \right) > T.$$

142. Функція Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

не залежить явно від координат φ та z у циліндричній системі координат, тому

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \text{const}.$$

Оскільки $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{k}$, то закони збереження мають вигляд:

$$\gamma m r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi = \text{const}, \quad \gamma m \dot{z} = p_z = \text{const}.$$

Якщо сумістити площину Oxy з площиною орбіти, то $p_z = 0$ і тому отримуємо два інтеграли — моменту імпульса та енергії:

$$\begin{cases} \gamma m r^2 \dot{\varphi} = M \\ \gamma m c^2 - \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r} = E \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \gamma m r^2 \dot{\varphi} = M \\ \gamma m c^2 = E + \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{cases}$$

Звідси $\dot{\varphi} = \frac{c^2 M}{r^2 (E + \alpha/r)}$, тому $dt = r^2 \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{d\psi}{c^2 M}$, де

$$\alpha = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0}, \quad \gamma = \frac{1}{m c^2} \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Таким чином,

$$\frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E + \alpha/r)^2}.$$

Підставляємо сюди вираз для $\dot{\varphi}$ і, змінивши похідну за t на похідну за кутом, одержуємо після нескладних перетворень:

$$\left(\frac{r'}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c M^2} \left[\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 c^4\right],$$

де $r' = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}$. Оскільки $\frac{r'(\varphi)}{r^2(\varphi)} = -\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r(\varphi)}$, то позначивши $x \equiv \frac{1}{r}$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= \left[\frac{E^2 - m^2 c^4}{M^2 c^2} - \frac{2\alpha E}{M^2 c^2} x - \left(1 - \left(\frac{\alpha}{M c}\right)^2\right) x^2 \right]^{1/2} \equiv \\ &\equiv [a + bx - dx^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

де a , b та d — сталі коефіцієнти. Результат інтегрування буде різний залежно від значення $d = 1 - \left(\frac{\alpha}{M c}\right)^2$. Розглянемо три різних випадки:

а) $d = 1 - \left(\frac{\alpha}{Mc}\right)^2 > 0$. Тоді підстановка $x = \frac{1}{d} (b + \sqrt{ad + b^2} \cos s)$ приводить до розв'язку

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\sqrt{d}(\varphi - \varphi_0))},$$

де

$$p = d \frac{M^2 c^2}{\alpha E}, \quad \varepsilon = \left[1 + d \frac{E^2 - m^2 c^4}{E^2} \frac{M^2 c^2}{\alpha^2} \right]^{1/2}$$

ε є параметром та ексцентриситетом орбіти, φ_0 — стала. При $\varepsilon \geq 1$ орбіта інфінітна і при $\cos \sqrt{d}(\varphi_{1,2} - \varphi_0) = 1/\varepsilon$, $r \rightarrow \infty$. При $\varepsilon < 1$ орбіта фінітна, але незамкнена, оскільки $r(\varphi + 2\pi) \neq r(\varphi)$. Якщо орбіту повернути в її площині за рухом частинки на кут $\Delta\varphi$ такий, що $\sqrt{d}(2\pi + \Delta\varphi)$, то орбіта буде замкнена. Умова $\varepsilon \geq 0$ накладає обмеження на енергію: $E \geq mc^2 \sqrt{d}$.

У класичному наближенні $c \rightarrow \infty$, $E \simeq mc^2 + W$, де W — повна енергія системи, причому $|W| \ll mc^2$, отримуємо: $\alpha = 1$, $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2WM^2}{m\alpha^2}} < 1$, що збігається з відомим результатом.

В ультрарелятивістському наближенні $E \gg mc^2$ отримуємо для ексцентриситета $\varepsilon \simeq \frac{Mc}{\alpha} > 1$ і орбіта гіперболічна. Можливе також інше ультрарелятивістське наближення: $|W| \simeq mc^2$ та $mc^2 \sqrt{d} \ll E \ll mc^2$, при $d \ll 1$. Тоді $\varepsilon \simeq \sqrt{1 - d \frac{m^2 c^4}{E^2} \frac{M^2 c^2}{\alpha^2}} < 1$ і рух — інфінітний. Для колової орбіти, коли $E = mc^2 \sqrt{d}$ ексцентриситет $\varepsilon = 0$ і тоді $r = p = \sqrt{d} M^2 / \alpha m$, а швидкість $v = r\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{M}$. Оскільки $d \ll 1$, то $\alpha/Mc \simeq 1$ і звідси $v \simeq c$;

б) $d = 1 - \left(\frac{\alpha}{Mc}\right)^2 = 0$. Тоді $M = \alpha/c$ і рівняння траєкторії набуває вигляду $x'(\varphi) = \sqrt{a + bx}$, звідки

$$r = \frac{2\alpha/E}{(\varphi - \varphi_0)^2 - 1 + (mc^2/E)^2},$$

тобто частинка падає в центр по квадратній спіралі. Класичний перехід дає $M = 0$, $r = 0$ і зводиться до падіння частинки на центр;

в) $d = 1 - \left(\frac{\alpha}{Mc}\right)^2 \equiv -\Delta < 0$. Тоді заміна змінної за формулою

$x = \frac{1}{\Delta} (-b + \sqrt{b^2 - a\Delta \operatorname{ch} s})$ дає розв'язок

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \operatorname{ch}(\sqrt{\Delta}(\varphi - \varphi_0))},$$

де

$$p = \Delta \frac{M^2 c^2}{\alpha E}, \quad \varepsilon = \left[1 - \Delta \frac{E^2 - m^2 c^4}{E^2} \frac{M^2 c^2}{\alpha^2} \right]^{1/2} \geq 1$$

(при довільних E) є параметром та ексцентриситетом орбіти відповідно. Якщо виконується $\varepsilon > 1$ (а це можливо при $E < mc^2$), орбіта фінітна і відбувається падіння по гіперболічній спіралі в центр. При $E > mc^2$, $\varepsilon < 1$ таке ж падіння відбувається з нескінченності. Класичний перехід відповідає падінню на центр.

143. Вісь z направляємо вздовж поля, а рух відбувається у площині Oxz . Тоді після першого інтегрування рівняння руху $\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$, отримаємо

$$\gamma m v_x = p_{x0}, \quad \gamma m v_z = p_{z0} + eEt,$$

де $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta^2 = (v_x^2 + v_z^2)/c^2$, а p_{x0}, p_{z0} — сталі. Звідси

$$\beta^2 = \frac{p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2}{m^2 c^2 + p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2},$$

тому

$$\dot{x} = \frac{p_{x0}}{m} \sqrt{1 - \beta^2} = c \frac{p_{x0}}{[m^2 c^2 + p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2]^{1/2}},$$

$$\dot{z} = c \frac{p_{z0} + eEt}{[m^2 c^2 + p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2]^{1/2}}.$$

Звідси видно, що при $t \rightarrow \infty$ отримаємо $\dot{z} \rightarrow c$, $\dot{x} \rightarrow 0$. Інтегруючи один раз, одержимо

$$x(t) = x_0 + \frac{cp_{x0}}{eE} \ln \frac{p_{z0} + eEt + (m^2 c^2 + p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2)^{1/2}}{p_{z0} + (m^2 c^2 + p_{x0}^2 + p_{z0}^2)^{1/2}},$$

$$z(t) = z_0 + \frac{c}{eE} \left[(m^2 c^2 + p_{x0}^2 + (p_{z0} + eEt)^2)^{1/2} - (m^2 c^2 + p_{x0}^2 + p_{z0}^2)^{1/2} \right].$$

У нерелятивістському випадку, коли $c \rightarrow \infty$

$$x(t) = x_0 + \frac{p_{x0}t}{m}, \quad z(t) = z_0 + \frac{p_{z0}t}{m} + \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2,$$

а в ультрарелятивістському

$$x(t) \simeq x_0 + \frac{cp_x}{eE} \ln \frac{2eEt}{mc}, \quad z(t) \simeq z_0 + ct.$$

Рівняння траєкторії отримаємо, виразивши t через x :

$$z(x) = z_0 + \frac{c}{eE} \left[\sqrt{m^2c^2 + p_{x0}^2} \operatorname{ch} \left(\frac{eE}{p_{x0}} (x - x_0) + \operatorname{arsh} \frac{p_{z0}}{\sqrt{p_{x0}^2 + m^2c^2}} \right) - \sqrt{m^2c^2 + p_{x0}^2 + p_{z0}^2} \right].$$

Звідси випливає, що частинка рухається по гіперболі.

144. Нерелятивістське рівняння руху одного осцилятора в полі плоскої монохроматичної хвилі:

$$m\ddot{x}_i = -k_{ij}x_j - \gamma_{ij}\dot{x}_j + e\varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k + eE_i e^{-i\omega t},$$

де ε_{ijk} — повністю антисиметричний тензор Леві-Чивіта. Розв'язок шукаємо у вигляді $x_i = x_{0i} e^{-i\omega t}$, що дає

$$x_{0l} = (\Lambda^{-1})_{lk} \frac{eE_{0k}}{m},$$

де матриця Λ означена як

$$\Lambda_{ij} = -\omega^2 \delta_{ij} + \frac{1}{m} k_{ij} - i \frac{\omega}{m} \gamma_{ij} + i \frac{e\omega}{m} \varepsilon_{ijk} B_k.$$

Отже, дипольний момент:

$$p_i = enx_i = \frac{e^2 n}{m} (\Lambda^{-1})_{ji} E_{0j} a^{-i\omega t} \equiv \varepsilon_0 \alpha_{ij} E_j,$$

а тому

$$\alpha_{ij} = \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m} (\Lambda^{-1})_{ji}(\omega) = \omega_p^2 (\Lambda^{-1})_{ji}(\omega), \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \omega_p^2 (\Lambda^{-1})_{ji}(\omega).$$

Із закону Ома $j_k = env_k = \sigma_{kl} E_l$ знаходимо тензор провідності у вигляді $\sigma_{ij} = -i\omega \varepsilon_0 \alpha_{ij}$.

а) $\Lambda_{ij} = \delta_{ij}(\omega_0^2 - \omega^2)$, де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

$$\varepsilon_{ij} = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \quad \sigma_{ij} = -i\omega\varepsilon_0\delta_{ij}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

при $\omega = 0, \sigma = 0$ (тобто ізолятор);

б) $\Lambda_{ij} = (-\omega^3 - ih\omega)$, де $h = \gamma/m$,

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + ih\omega}\right), \quad \sigma = i\omega\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + ih\omega},$$

при $\omega = 0, \sigma = \varepsilon_0\omega_0^2/h$ (тобто провідник);

в) $\Lambda_{ij} = -\omega^2\delta_{ij} + i\omega\varepsilon_{ijk}\frac{eB_k}{m}$, тому в системі координат з віссю z уздовж магнітного поля:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & i\omega_B/\omega & 0 \\ -i\omega_B/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (\omega_B/\omega)^2 \end{pmatrix},$$

де $\omega_B = eB/m$ — циклотронна частота,

$$\sigma_{ij} = \frac{i\varepsilon_0\omega\omega_B^2}{\omega_B^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & i\omega_B/\omega & 0 \\ -i\omega_B/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (\omega_B/\omega)^2 \end{pmatrix};$$

г) $\Lambda_{ij} = -\omega^2\delta_{ij} - i\varepsilon_{ijk}B_k\frac{e\omega}{m} - i\omega h\delta_{ij}$, тому в системі координат з віссю z уздовж магнітного поля

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2 - \omega^2 - ih\omega} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\omega_B}{\sqrt{\omega^2 + ih\omega}} & 0 \\ -\frac{i\omega_B}{\sqrt{\omega^2 + ih\omega}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2 + ih\omega} \end{pmatrix},$$

де $\omega_B = eB/m$ — циклотронна частота, $h = \gamma/m$,

$$\sigma_{ij} = -\frac{i\varepsilon_0\omega\omega_p^2}{\omega_B^2 - \omega^2 - ih\omega} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\omega_B}{\sqrt{\omega^2 + ih\omega}} & 0 \\ -\frac{i\omega_B}{\sqrt{\omega^2 + ih\omega}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2 + ih\omega} \end{pmatrix};$$

д) $\Lambda_{ij} = \delta_{ij}(-\omega^2 + \omega_0^2 - ih\omega)$, де $\omega_0^2 = k/m$ — власна частота

та, $h = \frac{\gamma}{m}$,

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - ih\omega} \right), \quad \sigma = -i \frac{\varepsilon_0 \omega \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - ih\omega}.$$

145. Вісь z направимо вздовж магнітного поля. Рівняння руху осцилятора мають вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x + \omega_B \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{e}{m} E_y - \omega_B \dot{x},$$

де ω_0 — власна частота осцилятора, $\omega_B = eB_0/m$ — циклотронна частота. Оскільки $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, то знаходимо:

$$r_{\pm} = \frac{e}{m} \frac{E_{\pm}}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega_B \omega},$$

де введене позначення $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$. З рівняння Максвелла отримаємо

$$E_{\pm} = E_{0\pm} e^{-(\omega t - k_{\pm} z)},$$

де

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp \omega_B \omega} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}, \quad \omega_B = \frac{eB}{m}.$$

Якщо при $z = 0$ вектор електричного поля паралельний осі y , то

$$E_x = E_0 \cos \left(\frac{k_+ + k_-}{2} z \right) e^{-i(\omega t - (k_+ + k_-)z/2)},$$

$$E_y = E_0 \sin \left(\frac{k_+ + k_-}{2} z \right) e^{-i(\omega t - (k_+ + k_-)z/2)},$$

і кут повороту площини поляризації на шляху l рівний $\chi = \frac{k_+ + k_-}{2} l$.

146. Рівняння руху для осцилятора в полі електромагнітної хвилі

$$m\ddot{x}_i = -m\omega_0^2 x_i - \sum_{j,k=1}^3 \beta_{ijk} x_j x_k - eE \cos(\omega t + \varphi_0)$$

є нелінійним, тому принцип суперпозиції не виконується і всі величини слід вважати дійсними. Заміна $x_i = L_i s_i$, $t = \tau T$, де L_i і T — довільні сталі розмірності довжини та часу, $s(\tau)$ і τ — безрозмірна

координата та час, дає

$$\ddot{s}_i(\tau) + T^2 \omega_0^2 s_i(\tau) = - \sum_{j,k=1}^3 \beta_{ijk} \frac{L_j L_k}{L_i} T^2 s_j(0) s_k(\tau) + \frac{e E_{0i} T^2}{m L_i} \cos(\omega T \tau + \varphi_0).$$

Поклавши $T^2 \omega_0^2$ і $\frac{e|\mathbf{E}|T^2}{mL_i}$ рівними одиниці, знаходимо розмірні параметри $T = \frac{1}{\omega_0}$, $L_i = \frac{e|\mathbf{E}|}{m\omega_0^2}$, тоді

$$\ddot{s}_i(\tau) + s_i(\tau) = e_i \cos(\nu\tau + \varphi_0) - \sum_{j,k} \beta_{ijk} \frac{e|\mathbf{E}_0|}{n^2 \omega_0^4} s_j(\tau) s_k(\tau),$$

де $\nu = \omega/\omega_0$, $e_i = E_i/|\mathbf{E}|$. Згідно з умовою задачі компоненти тензора $\gamma_{ijk} \equiv \beta_{ijk} e|\mathbf{E}|/m^2 \omega_0^4 \ll 1$, тому розв'язок шукаємо у вигляді ряду за степенями величини $\gamma = \max_{\{i,j,k\}}(\gamma_{ijk})$,

$$\begin{aligned} (\ddot{s}_i^0 + \gamma s_i^1 + \dots) + (s_i^0 + \gamma s_i^1 + \dots) &= e_i \cos(\nu\tau + \varphi_0) - \\ &- \sum_{j,k} \gamma_{ijk} (s_j^0 + \gamma s_j^1 + \dots)(s_k^0 + \gamma s_k^1 + \dots), \end{aligned}$$

і, порівнюючи доданки з однаковими степенями γ , отримаємо

$$\ddot{s}_i^0 + s_i^0 = e_i \cos(\nu\tau + \varphi_0), \quad \gamma(\ddot{s}_i^1 + s_i^1) = - \sum_{j,k=1}^3 g_{ijk} s_j^0(\tau) s_k^0(\tau),$$

і т. д. Звідси $s_i^0(\tau) = \frac{e_i}{1-\nu^2} \cos(\nu\tau + \varphi_0)$ і рівняння для першого порядку матиме вигляд

$$\ddot{s}_i^1(\tau) + s_i^1(\tau) = - \frac{1}{2(1-\nu^2)^2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\gamma_{ijk}}{\gamma} e_j e_k (\cos(\nu\tau + 2\varphi_0) + 1).$$

Його розв'язок:

$$\begin{aligned} s_i^1(\tau) &= \frac{1}{2(1-\nu^2)^2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\gamma_{ijk}}{\gamma} e_j e_k - \\ &- \frac{1}{(1-\nu^2)^2(1-4\nu^2)} \sum_{j,k} \frac{\gamma_{ijk}}{\gamma} e_j e_k \cos(2\nu\tau + 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Тому, у першому наближенні:

$$P_i = enx_i = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 E_i}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 e}{2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sum_{j,k}^3 \beta_{ijk} E_{0j} E_{0k} -$$

$$- \frac{\varepsilon_0 e \omega_p^2 \omega_0^2}{2m^2(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2(\omega_0^2 - 4\omega^2)} \sum_{j,k}^3 \beta_{ijk} E_{0j} E_{0k} \cos(2\omega t + 2\varphi_0),$$

де $\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0}$ — квадрат плазмової частоти.

Видно, що крім доданка, пропорційного до поля, існують ще два доданки: один не залежить від часу (ефект Пакеельса), другий — на подвоєній частоті, тобто $\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}^0(\omega) + \mathbf{P}^1(0) + \mathbf{P}^1(2\omega)$.

147. Відповідь:

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}^0(\omega_1) + \mathbf{P}^0(\omega_2) + \mathbf{P}^1(\omega_1 - \omega_1) + \mathbf{P}^1(\omega_1 + \omega_1) +$$

$$+ \mathbf{P}^1(\omega_2 - \omega_2) + \mathbf{P}^1(\omega_2 + \omega_2) + 2\mathbf{P}^1(\omega_1 + \omega_2) + \mathbf{P}^1(\omega_1 - \omega_2),$$

де члени $\mathbf{P}^1(0)$ та $\mathbf{P}^1(\omega)$ аналогічні до попередньої задачі, а

$$P_i^1(\omega_1 \pm \omega_2) =$$

$$= - \frac{e \omega_p^2 \omega_0^2 \cos((\omega_1 \pm \omega_2)t + \varphi_1 \pm \varphi_2)}{2m(\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)(\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2)} \sum_{j,k} \beta_{ijk} E_{0j} E_{0k}.$$

148. Вісь z направимо вздовж осі ланцюжка, хвиля поширюється в цьому ж напрямку. Рівняння руху осцилятора в n -му вузлі ланцюжка:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + n\omega_0^2 \mathbf{r}_n = h(\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) + h(\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n) + e\mathbf{E}(\mathbf{r}_n, t).$$

Оскільки вектор поляризації є дипольним моментом одиниці об'єму, тобто $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}_n, t) = e\mathbf{r}_n/v_0$, де v_0 — об'єм, що припадає на один осцилятор, то

$$m\ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_n, t) + n\omega_0^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}_n, t) =$$

$$= h(\mathbf{P}(\mathbf{r}_{n+1}, t) - 2\mathbf{P}(\mathbf{r}_n, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}_{n-1}, t)) + \frac{e}{v_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}_n, t).$$

Оскільки $r_{n+1} = r_n + a$, то за умови $\lambda \gg a$ вираз для міжосциляторної сили можна розкласти в ряд, вводячи $z = r_n$. Тоді

$$\ddot{\mathbf{P}}_{tt}(z, t) + \omega_0^2 \mathbf{P}(z, t) = \frac{ha^2}{m} \mathbf{P}_{zz}''(z, t) = \frac{e^2}{mv_0} \mathbf{E}(z, t).$$

Оскільки за означенням $\mathbf{P}(z, t) = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}(z, t)$, то отримаємо, вважаючи, що $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$:

$$\varepsilon = 1 + \alpha = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - k^2 h^2 a^2 / m},$$

де $\omega_p = (e^2 n / m \varepsilon_0)^{1/2}$ — плазмова частота.

Отже, діелектрична проникність середовища залежить не тільки від частоти, а й від довжини хвилі, що є причиною просторової дисперсії. Тому з дисперсійного рівняння для електромагнітних хвиль $k^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2 = 0$, знайдемо

$$k = \pm \left[\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_i^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_i^2} \right)^2 + 4 \frac{1}{a^2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_i^2}} \right],$$

де $\omega_i = \sqrt{\hbar / m}$ — власні частоти міжосциляторних коливань. Звідси видно, що є хвилі двох типів, залежно від знака під коренем, з різним показником заломлення $n = ck / \omega$.

149. Вісь z направимо по нормалі \mathbf{n} до пластинки. Тоді для електричного поля плоскої монохроматичної хвилі $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(z) e^{i\omega t}$:

$$E_{zz}''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) = 0,$$

де $\varepsilon = 1$ при $z < 0$ і $z > d$, ε — стала при $0 < z < d$. В області $z < 0$ будуть поширюватись дві хвилі — падаюча та відбита, в області $z > d$ — одна хвиля (яка пройшла через пластинку), при $0 < z < d$ — одна заломлена хвиля, яка пройшла через першу поверхню, і одна відбита від другої поверхні. Отже,

$$E(z) = \begin{cases} E_0 e^{ik_0 z} + A e^{-ik_0 z}, & z < 0, \\ E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}, & 0 < z < d, \\ D e^{ik_0 z}, & z > d. \end{cases}$$

Граничні умови $[\mathbf{E}, \mathbf{n}]_1 = [\mathbf{E}, \mathbf{n}]_2$, $[\mathbf{H}, \mathbf{n}]_1 = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]_2$ на обох поверхнях пластинки, де $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = -\frac{i}{\mu_0 \omega} \text{rot } \mathbf{E}$ дають систему чотирьох рівнянь, з яких знаходимо

$$A = \frac{\sqrt{\rho_0}(1 - e^{2ikd})}{1 - \rho_0 e^{2ikd}} E_0, \quad E_1 = \frac{2}{(1+n)(1 - \rho_0 e^{2ikd})} E_0,$$

$$E_2 = \frac{2\rho_0}{(1-n)(1 - \rho_0 e^{2ikd})} E_0, \quad D = \frac{\delta_0 e^{ikd}}{1 - \rho_0 e^{2ikd}} E_0,$$

де $\rho_0 = (1-n)^2/(1+n)^2$, $\delta_0 = 4n/(1+n)^2$ — коефіцієнти відбивання та проходження через напівобмежене середовище. Звідси для коефіцієнта відбивання

$$\rho = \frac{|A|^2}{|E_0|^2} = \frac{4\rho_0 \sin^2 kd}{\delta_0^2 + 4\rho_0 \sin^2 kd}$$

і при $kd = m\pi$, $\rho = 0$, тобто все світло проходить через пластинку, коли $d = \pi m/k = m\lambda/2$.

150. Сумістимо площину xy з межею розділення середовищ, вісь x із хвильовим вектором \mathbf{k} , а вісь y — з полем \mathbf{B} . Вісь z направимо в середовище ε_1 . Тоді рівняння для магнітного поля монохроматичної хвилі, яка поширюється вздовж осі x , $B_y(x, z, t) = B_{0y}(z)e^{ikx - i\omega t}$,

$$\Delta B_y - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{B}_y = \left(-k^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \right) B_y(z) + B_y''(z) = 0$$

поле хвилі може мати згасаючий вигляд при всіх z тільки тоді, коли $B_y(z) = B_{0y}e^{\varkappa|z|}$, що дає:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right) + \varkappa_1^2 = 0, \quad \text{при } z > 0,$$

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_2| \right) + \varkappa_2^2 = 0, \quad \text{при } z < 0.$$

Звідси $\varkappa_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1}$ та $\varkappa_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_2|}$. З граничних умов для тангенційних компонент обох полів при $z = 0$ отримуємо, що $B_{01} = B_{02}$ і $\frac{\varkappa_1}{\varepsilon_1} = \frac{\varkappa_2}{\varepsilon_2}$. Звідси знаходимо дисперсійне рівняння

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 |\varepsilon_2|}{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}.$$

Очевидно, що $|\varepsilon_2| > \varepsilon_1$.

151. Вісь z направимо уздовж осі хвилеводу. Тоді поперечні компоненти поля можуть бути представлені як

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{\kappa^2} (-\omega[\mathbf{e}_3, \nabla_\perp B_z] + k\nabla_\perp E_z), \\ \mathbf{B}_\perp &= \frac{i}{\kappa^2} \left(\frac{\omega\varepsilon}{c^2} [\mathbf{e}_3, \nabla_\perp E_z] + k\nabla_\perp B_z \right), \end{aligned}$$

де \mathbf{e}_3 — орт уздовж осі z , $\kappa^2 = \omega^2\varepsilon/c^2 - k^2$. Поздовжні поля

$$E_z = e_z(x, y)e^{-i(\omega t - kz)}, \quad B_z = b_z(x, y)e^{-i(\omega t - kz)}$$

задовольняють рівняння

$$e_z(x, y) = 0, \quad (\Delta_\perp + \kappa^2)b_z(x, y) = 0$$

з граничною умовою $\frac{\partial b_z}{\partial n} = 0$ для TE -хвиль, або рівняння

$$b_z(x, y) = 0, \quad (\Delta_\perp + \kappa^2)e_z(x, y) = 0$$

з граничною умовою $e_z = 0$ для TM -хвиль.

а) TE -хвилі

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} + \kappa^2 b_z = 0, \quad \frac{\partial b_z}{\partial n}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S,$$

де S — сторони прямокутника розміром $a \times b$.

Розв'язок має вигляд

$$b_{z,mn}(x, y) = b_0 \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, \quad m + n \geq 1, \quad m, n \geq 0,$$

що дає $\kappa^2 = \kappa_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$. Звідси для хвильового вектора знаходимо

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

і для $\text{Im } k > 0$ необхідно, щоб $\omega > \omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon}} \min(1/a, 1/b)$.

TM -хвилі. Аналогічно до попереднього отримаємо:

$$e_{z,mn}(x, y) = e_0 \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b},$$

з таким самим законом дисперсії, тільки за умови $m + n \geq 2$,

$m, n \geq 1$. Отже, $\omega > \omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon}} (1/a^2 + 1/b^2)^{1/2}$;

б) ТЕ-хвилі. Рівняння разом з граничною умовою може бути записане у формі

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b_z}{\partial \varphi^2} + \varkappa^2 b_z = 0, \quad \frac{\partial b_z}{\partial r}(R, \varphi) = 0.$$

Використовуючи метод відокремлення змінних, знайдемо:

$$b_{z,mn}(r, \varphi) = J_n(\varkappa_{nm} r) (a_{nm} \cos n\varphi + b_{nm} \sin n\varphi),$$

де $J_n(x)$ — функції Бесселя першого роду n -го порядку, a_{nm} та b_{nm} — довільні сталі, $\varkappa_{nm} = j'_{nm}/R$, j'_{nm} — m -й корінь рівняння $J'_n(x) = 0$. Отже, для хвильового вектора отримаємо:

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \frac{j'^2_{nm}}{R^2}}.$$

З теорії бesselевих функцій відомо, що найменший відмінний нуль корінь $j'_{nm} = j'_{11} = 1.84118$, тому $\omega > \omega_{\min} = \frac{c}{R\sqrt{\epsilon}} j'_{11} \simeq \frac{1.84118 c}{\sqrt{\epsilon} R}$.

ТМ-хвилі. Аналогічно до попередньої задачі

$$e_{z,mn} = J_n(\varkappa_{nm} r) (a_{nm} \cos n\varphi + b_{nm} \sin n\varphi),$$

де $\varkappa_{nm} = \frac{j_{nm}}{R}$, j_{nm} — m -й корінь рівняння $J_n(x) = 0$. Найменший відмінний нуль корінь функції Бесселя буде $j_{nm} = j_{01} \simeq 2.40482$, тому $\omega > \omega_{\min} \simeq \frac{2.40482 c}{\sqrt{\epsilon} R}$. Видно, що гранична частота для ТМ-хвиль є вищою у випадку прямокутного та круглого ідеальних хвилеводів та інша гранична частота ТМ-хвиль за інших умов.

152. Спочатку розглянемо ТЕ-хвилі. Тоді рівняння мають вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b_{z1}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b_{z1}}{\partial \varphi} + \varkappa_1^2 b_{z1} = 0, \quad \varkappa_1^2 = \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2}, \quad \text{при } r < R,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b_{z2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b_{z2}}{\partial \varphi} + \varkappa_2^2 b_{z2} = 0, \quad \varkappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \text{при } r > R.$$

На межі діелектрика з вакуумом тангенційні поля — неперервні, тому $b_{z1}(R) = b_{z2}(R)$, $B_{\varphi 1} = B_{\varphi 2}$, $E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2}$. Розв'язок при $r > R$ має вигляд $b_{z1}(r, \varphi) = J_n(\varkappa_1 r) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$. При $r > R$ потрібно врахувати, що хвилі мають поширюватись уздовж осі z , а тому при $r \rightarrow \infty$ поле повинно спадати так, щоб потік через

замкнену циліндричну поверхню стрижня прямував до нуля. Функції Бесселя $J_n(\varkappa_2 r)$ та $Y_n(\varkappa_2 r)$ мають асимптотику $1/\sqrt{r}$, тому вони даватимуть скінченний потік, якщо \varkappa_2 — дійсна величина. Отже, щоб поле поширювалось уздовж стрижня необхідно, щоб виконувалась умова $\varkappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = -\eta^2 < 0$. Тоді поле зовні стрижня $b_{z2}(r, \varphi) = K_n(\eta r)(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$. Оскільки

$$E_\varphi = -\frac{i\omega}{\varkappa_2^2} \frac{\partial b_z}{\partial r} e^{-i(\omega t - kz)}, \quad B_\varphi = \frac{ik}{\varkappa_2^2} \frac{1}{r} \frac{\partial b_z}{\partial \varphi} e^{-i(\omega t - kz)},$$

а $\cos n\varphi$ та $\sin n\varphi$ утворюють ортогональний базис, то з граничних умов впливають шість рівнянь на чотири сталі a_n, b_n, c_n та d_n :

$$\begin{aligned} a_n J_n(\varkappa_1 R) &= c_n K_n(\eta R), & b_n J_n(\varkappa_1 R) &= d_n K_n(\eta R), \\ \frac{na_n}{\varkappa_1^2} J_n(\varkappa_1 R) &= -\frac{nc_n}{\eta^2} K_n(\eta R), & \frac{nb_n}{\varkappa_1^2} J_n(\varkappa_1 R) &= -\frac{nd_n}{\eta^2} K_n(\eta R), \\ \frac{a_n}{\varkappa_1} J_n'(\varkappa_1 R) &= -\frac{c_n}{\eta} K_n'(\eta R), & \frac{b_n}{\varkappa_1} J_n'(\varkappa_1 R) &= -\frac{d_n}{\eta} K_n'(\eta R). \end{aligned}$$

Така система є сумісною лише у випадку $n = 0$. Тоді з чотирьох рівнянь для коефіцієнтів отримуємо таке дисперсійне рівняння:

$$\frac{1}{\eta} J_0(\varkappa_1 R) K_0'(\eta R) + \frac{1}{\varkappa_1} J_0'(\varkappa_1 R) K_0(\eta R) = 0,$$

або, враховуючи $J_0'(x) = -J_1(x)$ та $K_0'(x) = -K_1(x)$:

$$f_1(\omega) = \frac{J_1(\varkappa_1 R)}{\varkappa_1 R J_0(\varkappa_1 R)} = \frac{K_1(\eta R)}{\eta R K_0(\eta R)} \equiv f_2(\omega),$$

де $\varkappa_1 = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right]^{1/2}$, $\eta = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]^{1/2}$.

Якщо ввести $x = \varkappa_1 R$, то $\eta R = \left[\frac{\omega^2 R^2}{c^2}(\varepsilon - 1) - x^2\right]^{1/2}$ і графік лівої та правої частин рівняння приведені на рис. 10.

Оскільки при $x = 0$, $\eta R = \frac{\omega R}{c} \sqrt{\varepsilon - 1}$, а при $x = x_0 = \frac{\omega R}{c} \sqrt{\varepsilon - 1}$, $\eta R = 0$, то графік $f_2(x)$ лежатиме в межах $0 \geq x \geq x_0$, причому $f_2(x) < 0$, а

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \frac{1}{(\eta R)^2 \ln(\eta R)} \Big|_{\eta R \rightarrow 0} = -\infty.$$

Отже, якщо $x > j_{01}$, то криві перетнуться хоча б один раз і хвилі

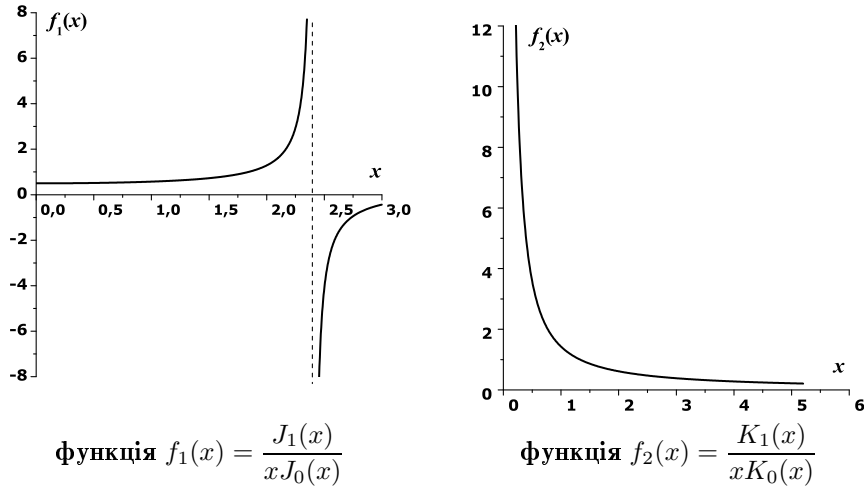


Рис. 10. До задачі 152

будуть поширюватись уздовж хвилеводу, а тому

$$\omega > \omega_{min} = \frac{j_{01}c}{R\sqrt{\varepsilon - 1}} \simeq \frac{2.40482 c}{R\sqrt{\varepsilon - 1}}.$$

Для TM -хвиль хід розв'язку — аналогічний, за винятком того, що граничні умови мають вигляд $e_{z1}(R) = e_{z2}(R)$, $E_{\varphi1}(R) = E_{\varphi2}(R)$ та $B_{\varphi1}(R) = B_{\varphi2}(R)$. Це дає

$$e_{z1}(r, \varphi) = J_n(\varkappa r)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad \text{при } r < R,$$

$$e_{z2}(r, \varphi) = K_n(\eta r)(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \quad \text{при } r > R,$$

а оскільки

$$E_{\varphi} = \frac{ik}{\varkappa^2} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} e^{-i(\omega t - kz)}, \quad B_{\varphi} = \frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa^2 c^2} \frac{\partial e_z}{\partial r} e^{-i(\omega t - kz)},$$

то граничні умови набуватимуть того самого вигляду, що й для TE -хвиль, за винятком двох останніх, де в лівій частині з'являється множник ε .

Система є сумісною тільки для $n = 0$, а дисперсійне рівняння після перетворень набуває вигляду

$$\varepsilon f_1(\omega) = \frac{J_1(\varkappa_1 R)}{\varkappa_1 R J_0(\varkappa_1 R)} = \frac{K_1(\eta R)}{\eta R K_1(\eta R)} \equiv f_2(\omega),$$

Наявність множника ε не змінить положення асимптот функції $f_1(x)$, а значить і мінімальної частоти, хоча сама частота для заданого k матиме інше значення, ніж для випадку TE -хвиль.

Отже, у діелектричному середовищі можуть поширюватись тільки циліндрично симетричні хвилі з частотами, більшими за мінімальну $\omega_{min} = \frac{c j_{01}}{R\sqrt{\varepsilon-1}}$, де j_{01} — перший корінь рівняння $J_0(x) = 0$.

153. Рівняння Максвелла для полів у резонаторі мають вигляд

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

а граничні умови на поверхні ідеального резонатора будуть $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ та $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. Усі поля — пропорційні до $e^{-i\omega t}$.

а) Розглянемо один з випадків TM -хвиль, коли, наприклад, $B_x = 0$. Тоді з $\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$ випливає, що

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad \text{або} \quad E_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

де $u(x, y, z)$ — деяка довільна функція. З рівняння $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{i\varepsilon\omega}{c^2} \mathbf{E}$ отримаємо, використавши вирази для E_y та E_z :

$$-\frac{i\omega\varepsilon}{c^2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad -\frac{i\omega\varepsilon}{c^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial x}.$$

Якщо покласти $u(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, z)$, то тоді можна взяти

$$B_z = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{c^2} \frac{\partial v}{\partial z},$$

де $v(x, y, z)$ — нова невідома функція. З першого ж рівняння Максвелла отримаємо тепер, використавши x -компоненту,

$$E_x = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \frac{ic^2}{\omega\varepsilon} = - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

Таким чином, ми виразили п'ять відмінних від нуля компонент поля через одну скалярну функцію, яка називається *потенціалом Дебая*. Можна перевірити, що $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ та $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ для довільних $v(x, y, z)$. Рівняння для функції $v(x, y, z)$ отримаємо з двох рівнянь, що залишились:

$$i\omega B_y = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z},$$

$$i\omega B_z = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y}.$$

Видно, що перше рівняння отримано диференціюванням по z , а друге — по y такого виразу:

$$\Delta v + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} v = 0. \quad (3.69)$$

Граничні умови для $v(x, y, z)$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z}(x, 0, z) &= \frac{\partial v}{\partial z}(x, b, z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, d) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}(0, y, z) &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}(a, y, z) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(0, y, z) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(a, y, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, 0, z) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, 0, z) &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, b, z) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, b, z) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}(x, 0, z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}(x, b, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y, 0) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, y, 0) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y, d) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, y, d) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y, 0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}(x, y, d) = 0 \end{aligned}$$

(всього 16). Розв'язок шукаємо у вигляді добутку гармонічних функцій

$$v(x, y, z) = A \cos(\alpha x + \varphi_x) \cos(\beta y + \varphi_y) \cos(\gamma z + \varphi_z).$$

Граничні умови виконуються, якщо вибрати $\varphi_x = 0$, $\alpha = \pi l/a$, $\varphi_y = \pi/2$, $\beta = \pi m/b$, $\varphi_z = \pi/2$, $\gamma = \pi n/c$, тобто

$$v(x, y, z) = A \cos \frac{\pi l x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \cos \frac{\pi n z}{c}, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

та

$$\omega_{lmn} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right]^{1/2},$$

отже, $\omega_{min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$ і хвилі будуть стоячими. Тепер для поля отримаємо

$$\begin{aligned} E_x &= A \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \pi^2 \cos \frac{\pi l x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi n z}{c} e^{-i\omega t}, \\ E_y &= -A \pi^2 \frac{ml}{ab} \sin \frac{\pi l x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \cos \frac{\pi n z}{c} e^{-i\omega t}, \\ E_z &= -A \pi^2 \frac{mn}{ac} \sin \frac{\pi l x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \cos \frac{\pi n z}{c} e^{-i\omega t}, \quad B_x = 0, \\ B_y &= -iA \frac{\sqrt{\epsilon} \pi^2 n}{c} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \cos \frac{\pi l x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \cos \frac{\pi n z}{c} e^{-i\omega t}, \\ B_z &= iA \frac{\sqrt{\epsilon} \pi^2 m}{c} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \cos \frac{\pi l x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi n z}{c} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Аналогічно розглядаються інші випадки TM -хвиль і TE -хвилі;

б) вісь z направимо уздовж циліндра і розглянемо TE -хвилі, коли $E_z = 0$. Тоді з рівняння $\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{i\omega\epsilon}{c^2} \mathbf{E}$ у циліндричних координатах випливає

$$\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \quad \text{або} \quad B_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad B_r = \frac{\partial u}{\partial r},$$

де u — деяка невідома функція. Далі розв'язок аналогічний задачі а). Тому з $i\omega \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{E}$ знайдемо $i\omega \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_r}{\partial z}$, $i\omega \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$, або, вибравши $u(r, z, \varphi) = \frac{\partial v}{\partial z}(r, \varphi, z)$, отримаємо

$$E_\varphi = -i\omega \frac{\partial v}{\partial r}, \quad E_r = \frac{i\omega}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Далі

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{i}{\omega} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(i\omega r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{i\omega}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= -\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

та одне з рівнянь на функцію $v(r, \varphi, z)$ (потенціал Дебая) має вигляд

$$-\frac{i\omega\epsilon}{c^2} E_r = \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2} - \frac{r}{r} \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} \right].$$

Звідси отримаємо

$$\Delta v + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} v = 0.$$

Розв'язок останнього рівняння можна отримати методом відокремлення змінних $v(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$. Граничні умови набувають вигляду

$$Z(0) = Z(d) = 0, \quad \frac{\partial R(r_0)}{\partial r} = 0.$$

Розв'язок має вигляд

$$v(r, \varphi, z) = J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2} r \right) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) \sin \frac{\pi m z}{d},$$

звідки знайдемо, що хвилі будуть стоячими.

Для частот отримаємо такий вираз, використовуючи граничну умову

$$\omega_{nml} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\left(\frac{j_{nl}'}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 \right]^{1/2},$$

де j_{nl}' — l -й корінь рівняння $J_n'(x) = 0$. Найменший відмінний від нуля корінь буде $j_{11}' = j_{11}' \simeq 1.84118$, тому

$$\omega_{min} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\left(\frac{1.84118}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Для поля знайдемо: $E_z = 0$,

$$E_r = \frac{i\omega n}{r} J_n \left(j_{nl}' \frac{r}{r_0} \right) (-A_{nml} \sin n\varphi + B_{nml} \cos n\varphi) \sin \frac{\pi m z}{d} e^{-i\omega t},$$

$$E_\varphi = -\frac{i\omega j_{nl}'}{r_0} J_n' \left(j_{nl}' \frac{r}{r_0} \right) (A_{nml} \cos n\varphi + B_{nml} \sin n\varphi) \sin \frac{\pi m z}{d} e^{-i\omega t},$$

$$B_r = \frac{\pi m j_{nl}'}{r_0 d} J_n' \left(j_{nl}' \frac{r}{r_0} \right) (A_{nml} \cos n\varphi + B_{nml} \sin n\varphi) \cos \frac{\pi m z}{d} e^{-i\omega t},$$

$$B_\varphi = \frac{\pi m n}{r_0 d} J_n' \left(j_{nl}' \frac{r}{r_0} \right) (-A_{nml} \sin n\varphi + B_{nml} \cos n\varphi) \cos \frac{\pi m z}{d} e^{-i\omega t},$$

$$B_z = \left(\frac{j_{nl}'}{r_0} \right)^2 J_n' \left(j_{nl}' \frac{r}{r_0} \right) (A_{nml} \cos n\varphi + B_{nml} \sin n\varphi) \sin \frac{\pi m z}{d} e^{-i\omega t}.$$

Аналогічно можна розглянути випадки TE -хвиль, де $E_r = 0$ і TM -хвилі з $B_z = 0$ або $B_r = 0$;

в) розглянемо TE -хвилі з $E_r = 0$. З рівняння $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$ випливає

$$i\omega \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r}(rE_\varphi), \quad \frac{i\omega}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta),$$

або, взявши $u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta, \varphi)}{\partial r}$, отримаємо

$$E_\varphi = -\frac{i\omega}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad E_\theta = \frac{i\omega}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi},$$

тому

$$B_r = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right].$$

Рівняння для потенціалу Дебая $v(r, \theta, \varphi)$ має вигляд:

$$\Delta v + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} v = 0,$$

його розв'язок будемо шукати методом відокремлення змінних у вигляді $v(r, \theta, \varphi) = R(r)T(\theta)\Phi(\varphi)$. Граничні умови дають $R(r_0) = 0$, розв'язок має вигляд

$$v(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \left(\frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right) P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi),$$

а з граничних умов випливає вираз для власних частот

$$\omega_{nl} = \frac{j_{n+1/2,l}}{r_0} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де $j_{n+1/2,l}$ — l -й корінь рівняння $J_{n+1/2}(x) = 0$.

Оскільки

$$\min_{n,l} \{j_{n+1/2,l}\} = j_{1/2,1} = \pi,$$

то $\omega_{min} = \pi c \sqrt{\varepsilon} / r_0$. Поля можна знайти за отриманими вище формулами. Аналогічно розглядається випадок TM -хвиль з $B_r = 0$.

З цих рівнянь видно, що поле в резонаторах є суперпозицією коливань з частотами ω_{lmn} .

154. Кожне власне коливання електромагнітного поля в резонаторі має свою частоту ω_{lmn} і поляризацію. Якщо частота ω є великою, то її можна наближено описати частотами ω_{lmn} з різними l , m та n . У прямокутному ідеальному резонаторі для заданої

частоти ω для вибраної поляризації справедливо

$$\frac{\omega^2 \varepsilon}{\pi^2 c^2} \simeq \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2},$$

де l, m та n — цілі додатні числа. У просторі всіх чисел (l, m, n) частота задає деякий еліпсоїд з півосями

$$A = \frac{\omega a \sqrt{\varepsilon}}{\pi c}, \quad B = \frac{\omega b \sqrt{\varepsilon}}{\pi c}, \quad D = \frac{\omega d \sqrt{\varepsilon}}{\pi c}.$$

Тому на частоті ω може бути стільки коливань, скільки існує різних трійок чисел (l, m, n) , які задовольняють рівняння

$$\frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} + \frac{n^2}{D^2} = 1, \quad \text{за умов } l, m, n > 0.$$

У такому шарі частот між ω та $\omega + \Delta\omega$ кількість коливань буде дорівнювати різниці об'ємів еліпсоїдів у просторі чисел, які задаються вказаними частотами. Отже, з урахуванням обмеження $l, m, n > 0$:

$$N = \frac{1}{8}(V(\omega + \Delta\omega) - V(\omega)) = \frac{4\pi}{3 \cdot 8} \left[\frac{\varepsilon^{3/2} abd}{c^3 \pi^3} (\omega + \Delta\omega)^3 - \frac{\varepsilon^{3/2} abd}{c^3 \pi^3} \omega^3 \right] \simeq \frac{abd\omega^2 \Delta\omega}{2c^3 \pi^2} \varepsilon^{3/2} = \frac{V\omega^2 \Delta\omega}{2\pi^2 c^3} \varepsilon^{3/2}.$$

155. З рівнянь магнітної гідродинаміки, вважаючи

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p(\rho) = p(\rho_0) + \frac{\partial p(\rho_0)}{\partial \rho} \rho', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}',$$

де $\rho' \ll \rho_0$, $|\mathbf{B}'| \ll |\mathbf{B}_0|$, $\frac{p(\rho_0)}{\rho} \rho' \ll p_0 = p(\rho_0)$ і $|\mathbf{v}| \ll u = \frac{p(\rho_0)}{\rho}$ (тут u — швидкість звуку), отримаємо

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, & \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], & \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -u^2 \nabla \rho + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} [\mathbf{B}', \mathbf{B}_0]. \end{cases}$$

156. Усі величини шукаємо у вигляді плоских хвиль, тобто $\rho', \mathbf{v}, \mathbf{B}'$

вважаються пропорційними до $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, а вісь z виберемо вздовж хвильового вектора. Тоді дисперсійне рівняння набуває вигляду

$$\left[(\omega^2 - k^2 u^2) \left(\omega^2 - \frac{k^2 B_0^2 \cos^2 \theta}{\mu_0 \rho_0} - \frac{\omega^2 k^2 B_0^2 \sin^2 \theta}{\mu_0 \rho_0} \right) \right] \times \\ \times \left(\omega^2 - \frac{k^2 B_0^2 \cos^2 \theta}{\mu_0 \rho_0} \right) = 0,$$

де θ — кут між векторами \mathbf{k} та \mathbf{B}_0 . Це рівняння — третього порядку відносно ω^2 і тому описує три типи електромагнітних хвиль:

1) $\omega = \frac{k B_0 \cos \theta}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$ — альфвенівські хвилі, для яких

$$v_{zp} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \quad v_{\phi} = \frac{B_0 \cos \theta}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}};$$

2) $\omega = k \left[\frac{1}{2}(k^2 + v_0^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(k^2 + v_0^2)^2 + k^2 v_0^2 \cos^2 \theta} \right]^{1/2}$, де $v_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$.

При $\theta = 0$ отримаємо дві хвилі з $\omega = ku$, тобто звичайна поперечна хвиля з $\omega = kv_0$, друга — альфвенівська хвиля. При $\theta \neq 0$ — дві альфвенівські хвилі, які називаються магнітозвуковими.

157. Система рівнянь магнітної гідродинаміки для магнітної гідродинаміки для електричного поля має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + n \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e}{e_0} (n - n_0), \end{cases}$$

де n — густина електронів, n_0 — густина іонів, \mathbf{v} — швидкість електронів, $e < 0$ — заряд електрона. У наближенні $\Delta n = n - n_0 \ll n_0$, нехтуючи квадратичними за швидкістю доданками, отримаємо рівняння $\Delta n(t)$ і розв'язок $\Delta n(t) = (\Delta n)_0 \exp(-i\omega_p t)$, де

$$\omega_p = (e^2 n_0 / \epsilon_0 m)^{1/2}$$

— частота власних коливань.

158. Вісь z направляємо вздовж поля \mathbf{B}_0 , вісь y — уздовж вектора швидкості, а точку 0 всередині між пластинами. Стационарні

рівняння набувають вигляду

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \rho_0(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{a} + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0, \mathbf{v}],$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0,$$

де $\mathbf{a} = \nabla p = a_0 \mathbf{j}$ — стала величина градієнта тиску. Згідно з трансляційною симетрією вздовж осей x та y всі величини не залежать від x та y . Тому рівняння набувають вигляду

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad B_z = B_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{j}v(z),$$

$$\frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0, \quad -a + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + B_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

звідки видно, що $B_x = 0$, а граничні умови для швидкості мають вигляд $v(d) = v(-d) = 0$. Граничні умови для магнітного поля впливають з рівності

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV = \int_V (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{r} dV = \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}] dV = \oint_{S(V)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r} dS = 0,$$

яка вірна, якщо виконується $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ на поверхні пластин. Оскільки $\mu_0 \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, то це дає

$$0 = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{B} dV = \oint_{S(V)} [\mathbf{n}, \mathbf{B}] dS.$$

Звідси отримаємо $B_y(-d) = B_y(d)$. Таким чином, система рівнянь

$$\eta v''(z) + \frac{B_0}{\mu_0} B_y'(z) = a, \quad \frac{1}{\mu_0 \sigma} B_y''(z) + B_0 v'(z) = 0$$

має граничні умови $v(-d) = v(d) = 0$, $B_y(d) = B_y(-d)$. Введемо $s = z/d$, тоді отримаємо для швидкості

$$v'''(s) - h^2 v'(s) = 0,$$

де $h = B_0 d \sqrt{\sigma/\eta}$ — число Гартмана. Його розв'язок має вигляд

$$v(s) = A_1 e^{-hs} + A_2 e^{hs} + A_3,$$

де A_i — сталі. Якщо додати ще одну граничну умову для v , наприклад $v(0) = v_0$, то тоді

$$v(z) = v_0 \frac{\operatorname{ch} h - \operatorname{ch} \frac{hz}{d}}{\operatorname{ch} h - 1},$$

де v_0 — невідома стала. З першого рівняння системи отримаємо

$$B_y(z) = C - \frac{\mu_0 a}{B_0} z + \frac{\eta \mu_0}{B_0} v_0 \frac{2h}{d} \frac{h/a}{h},$$

де $C = 0$ — стале магнітне поле вздовж осі y . З граничної умови для B_y знаходимо: $v_0 = \frac{ad^2}{\eta} \frac{\operatorname{ch} h - 1}{h \operatorname{sh} h}$.

Отже,

$$v_y(z) = \frac{ad^2}{\eta} \frac{\operatorname{ch} h - \operatorname{ch} hs}{h \operatorname{sh} h}, \quad s = \frac{z}{d},$$

$$B_y(z) = \frac{\mu_0 ad^2}{h} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \left(\frac{\operatorname{sh} hs}{\operatorname{sh} h} - s \right), \quad j_x(z) = i \frac{ad}{h} \left(1 - h \frac{\operatorname{ch} hs}{\operatorname{ch} h} \right) \sqrt{\frac{\sigma}{h}},$$

$$E_x(z) = \frac{ad}{h \sqrt{\sigma \eta}} (1 - h \operatorname{cth} h),$$

тобто виникає струм і стале електричне поле, перпендикулярне до \mathbf{v} та \mathbf{B}_0 .

159. Виберемо систему координат, в якій $z \parallel \mathbf{B}_0$, $y \parallel \mathbf{v}$, $x \parallel \mathbf{E}$. Аналогічно до попередньої задачі отримаємо

$$\begin{cases} \eta v''(z) + \frac{B_0}{\mu_0} = 0, \\ \frac{1}{\mu_0 \sigma} B''(z) + B_0 v'(z) = 0. \end{cases}$$

Граничні умови $v(d) = v_0$, $v(-d) = 0$. Оскільки умови не симетричні, то простих умов для магнітного поля немає, але є умова $\mathbf{E} = i\mathbf{E}_0 = \text{const}$. Це дає змогу знайти третю сталу. Отже, $v_y(s) = A_1 e^{-hs} + A_2 e^{hs} + A_3$, де $s = z/d$. З граничних умов знаходимо A_1 та A_2 як функції v_0 та A_3 , потім шукаємо $B_y(z)$, $\mathbf{j}(z)$

і $\mathbf{E}(z)$ тим самим способом, що й у попередній задачі. Прирівнюючи $\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0$, знаходимо A_3 , що дає можливість отримати

$$v(z) = v_0 \frac{\text{sh}(h(s+1))}{\text{sh} 2h} - \frac{E_0}{B_0} \left(1 - \frac{\text{ch} hs}{\text{ch} h} \right),$$

$$B_y(z) = -\mu_0 \sqrt{\mu \sigma} \left(v_0 \frac{\text{ch} h(s+1)}{2h} + \frac{E_0}{B_0} \frac{\text{sh} hs}{\text{sh} h} \right),$$

$$j_x(z) = \sigma \left(v_0 B_0 \frac{\text{sh} h(s+1)}{2h} + E_0 \frac{\text{ch} hs}{\text{ch} h} \right).$$

160. У власній системі координат у нерелятивістському випадку для струму запишемо $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$, отже $\mathbf{E}' = \mathbf{j}'/\sigma = 0$, оскільки $\sigma \rightarrow \infty$. Так як $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, то $\mathbf{v} = [\mathbf{E}, \mathbf{B}]/B^2$.

Додатки

Д1. Основні формули векторного аналізу

У векторних тотожностях, наведених нижче, вважається, що векторні та скалярні функції залежать від радіус-вектора точки, який у прямокутних декартових координатах має вигляд $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (\text{Д1.1})$$

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}]. \quad (\text{Д1.2})$$

$$\oint_S n_j f(\mathbf{r}) dS = \int_{V(S)} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{r}) dV \quad (\mathbf{n} - \text{зовнішня нормаль}); \quad (\text{Д1.3})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{b}; \quad (\text{Д1.4})$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi; \quad (\text{Д1.5})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}; \quad (\text{Д1.6})$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot [\nabla, \mathbf{A}] = 0; \quad (\text{Д1.7})$$

$$\text{rot grad } \varphi = [\nabla, \nabla] \varphi = 0; \quad (\text{Д1.8})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}; \quad (\text{Д1.9})$$

$$\text{grad}(f\varphi) = \nabla(f\varphi) = \varphi \text{ grad } f + f \text{ grad } \varphi; \quad (\text{Д1.10})$$

$$\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi; \quad (\text{Д1.11})$$

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{A} - [\mathbf{A}, \text{grad } \varphi]; \quad (\text{Д1.12})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (\text{Д1.13})$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}; \quad (\text{Д1.14})$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}]; \quad (\text{Д1.15})$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{A}^2 = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}]. \quad (\text{Д1.16})$$

Д2. Криволінійні координати

Задачу найлегше розв'язувати, якщо система координат має ту саму симетрію, що й умови задачі. Якщо замість декартової системи координат з ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ і координатами x, y, z вводиться криволінійна ортогональна система координат ортами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ і координатами q_1, q_2, q_3 за правилом $x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3)$, то справедливо:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i},$$

де $\mathbf{r} = \mathbf{i}x(q_1, q_2, q_3) + \mathbf{j}y(q_1, q_2, q_3) + \mathbf{k}z(q_1, q_2, q_3)$, H_i — параметри Ламе:

$$H_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Часто застосовуються такі криволінійні ортогональні системи координат:

1) циліндричні $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1,$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k};$$

2) сферичні $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \theta; \\H_1 &= 1, & H_2 &= r, & H_3 &= r \sin \theta, \\e_r &= \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta, \\e_\theta &= \mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta, \\e_\varphi &= -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi;\end{aligned}$$

3) параболічні $q_1 = u, q_2 = v, q_3 = \varphi$:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{uv} \cos \varphi, & y &= \sqrt{uv} \sin \varphi, & z &= \frac{u-v}{2}; \\H_1 &= \sqrt{\frac{u+v}{4u}}, & H_2 &= \sqrt{\frac{u+v}{4v}}, & H_3 &= \sqrt{uv}.\end{aligned}$$

Д3. Диференціальні операції в криволінійних координатах

Відмінність цих операторів від випадку декартових координат зумовлена двома причинами: по-перше, замінюються змінні, по-друге, у векторних функціях орти стають змінними і при диференціюванні це потрібно враховувати.

Справедливі такі вирази для похідних у криволінійних координатах:

$$\operatorname{grad} \varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{e_i}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{Д3.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(J \frac{A_i}{H_i} \right), \quad (\text{Д3.2})$$

де $J = H_1 H_2 H_3$ — якобіан переходу;

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{Д3.3})$$

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{J}{H_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right), \quad (\text{Д3.4})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (\text{Д3.5})$$

Для деяких ортогональних координат можна одержати такі вирази:

1) циліндричні координати:

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (\text{Д3.6})$$

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{Д3.7})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - r \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{Д3.8})$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (\text{Д3.9})$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi + \Delta A_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (\text{Д3.10})$$

де операція ΔA_α обчислюється за формулою (Д3.9);

2) сферичні координати:

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\text{Д3.11})$$

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \quad (\text{Д3.12})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right) + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{Д3.13})$$

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{Д3.14})$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \left[\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ & + \left[\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \text{ctg} \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

де операція ΔA_α обчислюється за формулою (Д3.14).

Д4. Дельта-функція Дірака

Дельта-функцією (δ -функцією) Дірака називається математичний об'єкт, який має такі властивості:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{якщо } x_0 \in (a, b), \\ \frac{1}{2} f(x_0), & \text{якщо } x_0 = a, \text{ або } x_0 = b, \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin (a, b), \end{cases} \quad (\text{Д4.1})$$

де $f(x)$ — довільна функція, визначена на $[a, b]$. δ -функція Дірака не є функцією у звичайному розумінні цього слова, хоча є функції, які в граничному переході задовольняють умову (Д4.1). Зокрема, це такі функції:

$$\delta_\mu(x) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 x^2}; \quad (\text{Д4.2})$$

$$\delta_a(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 ax}{ax^2}; \quad (\text{Д4.3})$$

$$\delta_\gamma(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2}. \quad (\text{Д4.4})$$

Якщо підставити будь-яку з них у ліву частину (Д4.1) та обчислити інтеграл, провівши розклад функції $f(x)$ у ряд Тейлора навколо точки x_0 , а потім обчислити вказану границю, то одержимо праву частину (Д4.1). Але якщо зобразити графіки функцій (Д4.2) – (Д4.4) при певних значеннях параметрів, то побачимо, що вони будуть різними, хоча і схожими поблизу точки 0 (рис. 11, $\mu = a = 1/\gamma = 10$). Із формул (Д4.2), (Д4.3) та рис. 11

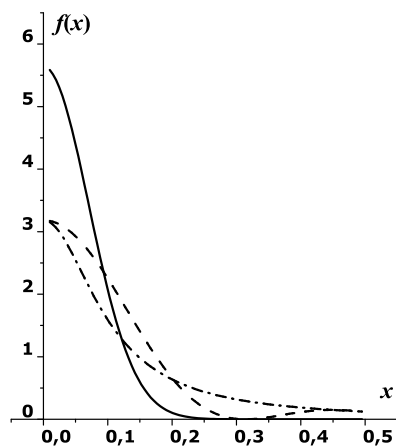


Рис. 11. Функції, що прямують до δ -функції Дірака

видно, що при $x \neq 0$ можна вважати $\delta(x) = 0$. Використовуючи означення (Д4.1) і вважаючи $x \in (a, b)$, можна встановити такі властивості δ -функції:

$$\int_a^b f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0), \quad (\text{Д4.5})$$

$$\int_a^b f(x) \delta^n(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0), \quad (\text{Д4.6})$$

$$\int_a^b f(x) \delta^n(\varphi(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}, \quad (\text{Д4.7})$$

де x_i — прості корені рівняння $\varphi(x) = 0$, які належать інтервалу (a, b) .

Розклад δ -функції в інтеграл Фур'є має вигляд

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk, \quad (\text{Д4.8})$$

звідки видно, що фур'є-образ δ -функції є $\delta(k) = 1$. Із (Д4.8) легко

одержати

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x - x_0) dk, \quad (\text{Д4.9})$$

очевидно, $\delta(x)$ — парна функція.

Якщо аргументом δ -функції є кут, то

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{Д4.10})$$

Крім вказаних представлень δ -функцію можна ввести як похідну від функції-сходінки (функції Хевісайда)

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

тобто

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \theta(x - x_0). \quad (\text{Д4.11})$$

Дельта-функція від векторного аргументу вводиться таким чином:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{J(q_1, q_2, q_3)} \delta(q_1 - q_{1o}) \delta(q_2 - q_{2o}) \delta(q_3 - q_{3o}), \quad (\text{Д4.12})$$

де $J(q_1, q_2, q_3)$ — якобіан переходу з декартової системи координат у систему (q_1, q_2, q_3) , вона має властивість аналогічну (Д4.1):

$$\int_V f(\mathbf{r}) dV = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{Д4.13})$$

якщо $\mathbf{r}_0 \in V$. Її розклад в ряд Фур'є має вигляд

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} dV. \quad (\text{Д4.14})$$

Вона з'являється в обчисленні оператора Лапласа

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{Д4.15})$$

а також при обчисленні ряду інших похідних другого порядку за вектором \mathbf{r} від $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$.

Д5. Еліптичні інтеграли

Функція

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt \quad (\text{Д5.1})$$

називається еліптичним інтегралом, якщо $f(t)$ є раціональною функцією від t і квадратного кореня $\sqrt{g(t)}$, де $g(t) = a_0t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$, а нижня межа інтеграла z_0 не дорівнює жодному з коренів $g(t)$. За рахунок заміни змінних, яка залежить від розташування коренів функції $g(t)$ та явного вигляду $f(t)$, завжди вдається звести (Д5.1) до суми елементарних функцій і суми трьох вищих трансцендентних функцій — так званих нормальних еліптичних інтегралів. Вони мають вигляд

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (\text{Д5.2})$$

— нормальний еліптичний інтеграл Лежандра першого роду,

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (\text{Д5.3})$$

— нормальний еліптичний інтеграл Лежандра другого роду,

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 + n \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (\text{Д5.4})$$

— нормальний еліптичний інтеграл Лежандра третього роду. У виразах (Д5.2) – (Д5.4) вважається $k \leq 1$. У випадку $\varphi = \pi/2$ інтеграли (Д5.2) та (Д5.3) називаються повними і позначаються $K(k)$ та $E(k)$ відповідно.

Основні властивості еліптичних повних інтегралів:

1) розклад у ряд Тейлора при $k \ll 1$:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right], \quad (\text{Д5.5})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]; \quad (\text{Д5.6})$$

2) асимптотика при $k \rightarrow 1$:

$$K(k) = \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-k^2}, \quad (\text{Д5.7})$$

$$E(k) = 1; \quad (\text{Д5.8})$$

3) рекурентні співвідношення:

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad (\text{Д5.9})$$

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E-K}{k}. \quad (\text{Д5.10})$$

Д6. Функції Бесселя

Рівняння

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (a^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (\text{Д6.1})$$

має своїми розв'язками вищі трансцендентні функції, які називаються функціями Бесселя I та II родів і позначаються, відповідно, $J_\nu(ax)$ та $Y_\nu(ax)$. Їх лінійні комбінації

$$H_\nu^{(1,2)}(ax) = J_\nu(ax) \pm iY_\nu(ax)$$

називаються функціями Ганкеля I та II родів. Найчастіше зустрічаються функції Бесселя цілого порядку, тобто $\nu = n$. Існує багато різних представлень функції Бесселя, зокрема:

- у вигляді нескінченного ряду

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad (\text{Д6.2})$$

(отже $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$);

- у вигляді інтегралу

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(x \cos \varphi - n\varphi)} d\varphi; \quad (\text{Д6.3})$$

- у вигляді інтегралу у комплексній площині

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C t^{-n-1} \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] dt, \quad (\text{Д6.4})$$

де контур C оточує початок координат;

- як коефіцієнти ряду Тейлора при розкладі деякої функції, яка називається *твірною*:

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = J_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(t^k - \frac{1}{t^k} \right) J_k(x). \quad (\text{Д6.5})$$

Основні властивості функцій Бесселя:

- 1) ортогональність на інтервалі $[0, 1]$:

$$\int_0^1 r J_n(j_{nl}r) J_n(j_{nm}r) dr = \frac{1}{2} \delta_{ml} [J'_n(j_{mn})]^2, \quad (\text{Д6.6})$$

де j_{nl} — l -й корінь рівняння $J_n(x) = 0$, δ_{ml} — символ Кронекера;

- 2) ортогональність на інтервалі $[0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} r J_m(\lambda r) J_m(\eta r) dr = \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda - \eta), \quad (\text{Д6.7})$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака;

- 3) асимптотика при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} J_n(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right), \\ Y_n(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right); \end{aligned} \quad (\text{Д6.8})$$

- 4) значення при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} J_n(x) &\simeq \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)}, \\ Y_n(x) &\simeq \left(\frac{2}{x} \right)^n \frac{\Gamma(n)}{\pi} \text{ при } n \neq 0 \quad Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi} (\ln x - 0.11593); \end{aligned} \quad (\text{Д6.9})$$

5) рекурентні формули

$$\frac{2n}{x}z_n(x) = z_{n-1}(x) + z_{n+1}(x), \quad 2z'_n(x) = z_{n-1}(x) - z_{n+1}(x), \quad (\text{Д6.10})$$

де $z_n(x)$ — лінійна комбінація функцій Бесселя зі сталими коефіцієнтами. Для похідних:

$$\frac{d}{dx}(x^n z_n(x)) = x^n z_{n-1}(x), \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{z_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{z_{n+1}(x)}{x^n}. \quad (\text{Д6.11})$$

У задачах часто зустрічаються такі формули:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \int_0^{\infty} J_m(\lambda \rho) J_m(\lambda \rho') e^{-\lambda(z - z')} d\lambda, \quad (\text{Д6.12})$$

$$\int_0^{\infty} J_0(bt) \frac{\exp(-a\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} t dt = \frac{\exp(i|y|\sqrt{a^2 + b^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{Д6.13})$$

(інтеграл А. Зоммерфельда);

$$e^{-iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{-in\varphi}, \quad (\text{Д6.14})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{1}{nb^n} (\sqrt{a^2 + b^2} - 1)^n. \quad (\text{Д6.15})$$

Модифіковані функції Бесселя. Функції Бесселя від уявного аргументу вводять таким чином:

$$I_n(x) = \left(\frac{1}{i} \right)^n J_n(ix), \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix), \quad (\text{Д6.16})$$

вони задовольняють диференціальне рівняння

$$x^2 y''(x) + xy' - (ax^2 + n^2)y = 0. \quad (\text{Д6.17})$$

Форма запису через ряди впливає з (Д5.2), а поведінка при великих і малих значеннях аргументу така:

$$I_n(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_n(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq \frac{e^{-x} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}, \quad (\text{Д6.18})$$

$$I_n(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)},$$

$$K_n(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq \left(\frac{2}{x}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{2} \quad (\text{для } n \neq 0), \quad K_0(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq -\ln x.$$

Рекурентні співвідношення випливають з (Д6.10) та (Д6.11), якщо виразити J_n та Y_n через I_n та K_n .

Нулі функцій Бесселя. Нулі функцій Бесселя першого роду є розв'язками рівняння $J_n(x) = 0$. Вони утворюють нескінченну послідовність чисел і позначаються як $j_{n,k}$, де k — номер k -го кореня для n -ї функції ($k \geq 1$). Усі вони дійсні, прості, за винятком, можливо, точки 0 і задовольняють таку умову

$$\dots < j_{n,k} < j_{n+1,k} < j_{n,k+1} < j_{n+1,k+1} < j_{n,k+2} < j_{n+1,k+2} < \dots$$

Нулі похідної функції Бесселя першого роду, які є розв'язками рівняння $J'_n(x) = 0$, позначаються як $j'_{n,k}$. Їх властивості аналогічні до $j_{n,k}$. Подібні властивості мають і нулі функцій $Y_n(x)$ та $Y'_n(x)$, які позначаються як $y_{n,k}$ та $y'_{n,k}$ відповідно.

Справедливі такі розклади для коренів комбінацій функцій Бесселя $z_\nu(x) = J_\nu(x) \cos \alpha - Y_\nu(x) \sin \alpha$ та $z'_\nu(x)$:

$$z_{\nu k} \simeq \beta - \frac{\mu^2 - 1}{8\beta} \left(1 + \frac{p_1}{3(4\beta)^2} + \dots \right), \quad (\text{Д6.19})$$

$$z'_{\nu k} \simeq \gamma - \frac{\mu + 3}{8\gamma} - \frac{Q_1}{6(4\gamma)^3} - \dots, \quad (\text{Д6.20})$$

де

$$\beta = \frac{\pi}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} + 2k \right) - \alpha, \quad \mu = 4\nu^4, \quad p_1 = 7\mu - 31,$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} + 2k \right) - \alpha, \quad Q_1 = 7\mu^2 - 82\mu - 9.$$

Звідси видно, що $j_{nk} = z_{nk}$ (при $\alpha = 0$), $y_{nk} = z_{nk}$ (при $\alpha = \pi/2$). Для найменших значень одержуємо $\min j_{nk} = j_{0k} \simeq 2.40483$, $\min j'_{nk} = j'_{11} \simeq 1.84118$; крім того, $j'_{01} = 0$.

Д7. Поліноми Лежандра

Функцією Лежандра першого роду називається розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) + n(n+1)y(x) = 0, \quad (\text{Д 7.21})$$

обмежений при $x = 1$. Позначення: $y(x) = P_n(x)$. Для цілих значень n функція $P_n(x)$ є поліномом порядку n , загальний вираз якого дається формулою Родрігеса

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{Д 7.22})$$

Кілька перших поліномів Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

Із формули Родрігеса легко отримати частинні значення поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \\ P_{2k+1}(0) &= 0, \quad P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \end{aligned} \quad (\text{Д 7.23})$$

Функції $P_n(x)$ утворюють повну систему ортогональних функцій на інтервалі $[-1, 1]$. Інтеграл нормування має вигляд

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (\text{Д 7.24})$$

Розклад довільної функції $f(x)$ у ряд за поліномами Лежандра на інтервалі $[-1, 1]$ дається виразом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (\text{Д 7.25})$$

У класичній електродинаміці поліноми Лежандра виникають у зв'язку з розкладом функції $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (потенціал одиничного точкового заряду, розташованого в точці \mathbf{r}') у ряд Тейлора за степенями частки $\frac{r'_<}{r_>}$, де $r_>$ і $r'_<$ — більша та менша з величин r і r' . Має

місце формула

$$F(x, t) = \frac{1}{[1 - 2xt + t^2]^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (\text{Д } 7.26)$$

Функція $F(x, t)$ називається твірною функцією. У контексті класичної електродинаміки цей розклад має вигляд

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\left[1 - 2\frac{r_<}{r_>} \cos \alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2\right]^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \alpha),$$

де $\alpha = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Поліноми Лежандра задовольняють два основні рекурентні співвідношення, які випливають з властивостей твірної функції:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP_n(x), \\ (n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n(x) + xP_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д } 7.27)$$

Інші рекурентні співвідношення, які випливають з (Д 7.27):

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) - xP_n(x) &= (n+1)P_n(x), \quad xP'_n(x) - P_{n-1}(x) = nP_n(x), \\ P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) &= (2n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

Д8. Приєднані функції Лежандра

Рівняння для приєднаних функцій Лежандра має вигляд

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0. \quad (\text{Д } 8.28)$$

Обмежені розв'язки при $x = 1$ позначаються $P_n^m(x)$ і виражаються через поліноми Лежандра

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n, \quad (\text{Д } 8.29)$$

де $m = \overline{-n, n}$ (ціле число). Із формули Родрігеса випливає, що

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (\text{Д } 8.30)$$

Зокрема,

$$P_n^n = (2n - 1)!!(1 - x^2)^{n/2}.$$

Для кожного значення m функції $P_n^m(x)$ є ортогональними на інтервалі $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll}. \quad (\text{Д8.31})$$

Д9. Сферичні гармоніки

Сферичні гармоніки виражаються через приєднані поліноми Лежандра як¹

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{Д9.32})$$

де θ та φ — кути сферичної системи координат, і задовольняють рівняння

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{Д9.33})$$

де

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

є кутовою частиною оператора Лапласа.

При $m = 0$ сферична гармоніка виражається через поліном Лежандра:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta).$$

¹У даному випадку приєднані функції Лежандра зручно записувати у вигляді

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)}$$

Найпростіші властивості:

$$Y_{lm}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}, \quad Y_{l,-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^{l-m}Y_{l,|m|}^*(\theta, \varphi),$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi). \quad (\text{Д9.34})$$

Сферичні гармоніки утворюють повну систему ортогональних функцій на множині $\theta \in [0, \pi]$ та $\varphi \in [0, 2\pi]$ (поверхня сфери):

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi'), \quad (\text{Д9.35})$$

де позначено $\Omega = (\theta, \varphi)$ (пара кутів) та $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Довільна функція $f(\theta, \varphi)$ може бути розкладена в ряд за сферичними гармоніками:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad A_{lm} = \int Y_{lm}(\Omega) f(\Omega) d\Omega. \quad (\text{Д9.36})$$

Інтеграли за кутом φ мають вигляд:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) d\varphi = 2\pi \delta_{m0} Y_{l0}, \quad \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) d\varphi = 2\pi \delta_{mm'} Y_{l0}^* Y_{l'0}.$$

У класичній електродинаміці сферичні гармоніки виникають у зв'язку з розкладом функції $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (потенціал одиничного точкового заряду, розташованого в точці \mathbf{r}') у ряд Тейлора за степенями частки $\frac{r'_<}{r'_>}$, де $r'_>$ і $r'_<$ — більша та менша з величин r і r' . Має місце формула (так звана теорема додавання)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (\text{Д9.37})$$

Література

- [1] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М.: “Наука”, 1970.
- [2] Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: “Мир”, 1965.
- [3] Метьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. — М.: “Мир”, 1958.
- [4] Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики/в 2-х т. — т. I. — М.: ИЛ, 1958.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: “Наука”, 1967.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: “Наука”, 1957.
- [7] Смайт В. Электростатика и электродинамика. — М.: ИЛ, 1954.
- [8] Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
- [9] Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа/в 2-х т. — т. II. — М.: ИЛ, 1964.

Навчальне видання

Макарець Микола Володимирович,
Решетняк Віктор Юрієвич,
Романенко Олександр Вікторович

Задачі з класичної електродинаміки

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

Редактор Львова Л. П.

*Оригінал-макет виготовлено авторами
за допомогою видавничого пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$*

Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет»
03033, Київ, бульв. Т. Шевченка, 14, кімн. 43, тел: (38044) 221 3222; (38044) 221 9972;
факс(38044) 221 3222
Підписано до друку Формат Вид. №
Друк офсетний. Наклад Умовн. друк. арк.