Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Фізичний факультет

Романенко О.В.

Додаткові розділи класичної механіки: вироджені механічні системи

**Методична розробка
для студентів фізичного факультету**

Київ 2019

Упорядник:
Романенко Олександр Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, професор ***Макарець М.В.***
доктор фіз.-мат. наук, доцент ***Ледней М.Ф.***

Передмова

Дана методична розробка є додатковим матеріалом до підручника [1] з нормативної дисципліни “Класична механіка”, яка викладається студентам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Метою розробки є викладення вступу до аналітичної динаміки вироджених систем механічного походження, здебільшого цей матеріал не викладається на лекціях студентам молодших курсів, а вивчається уже у польовій формі на окремих спеціалізаціях старших курсів з використанням групових методів. Ознайомлення саме з такою, механічною формою теорії вироджених систем буде корисне студентам всіх спеціальностей для розуміння меж застосовності методів аналітичної динаміки, яка викладається у основному курсі, а також студентам, які будуть вивчати вироджені системи у сучасній теорії поля.

Київ, 2019

Вироджені механічні системи

1. Виродженість у механічних системах. Раніше було розглянуто побудову аналітичної механіки для широкого класу механічних систем, від рівнянь Лагранжа та принципу д'Аламбера можна перейти до варіаційного принципу, побудувати канонічні рівняння і фактично знайти рецепт для розв'язку довільної механічної задачі (за допомогою вдало виконаних перетворень або з використанням рівняння Гамільтона-Якобі). Однак переважна більшість таких можливостей буде доступною, якщо функція Лагранжа задовольняє деякі обмеження. Для формулювання проблеми розглянемо рівняння руху, які будуються безпосередньо з принципу д'Аламбера:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

де для зручності позначено $v_i = \dot{q}_i$. У розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\,\dot{v}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial q_j}\,v_j\,.$$

Такі рівняння із заданими початковими умовами (задача Коші) мають однозначний розв'язок, якщо з отриманого виразу можна виразити старші похідні $\dot{v}_i = \ddot{q}_i$. Саме це передбачалось за замовчуванням раніше. Аналіз механічної системи суттєво ускладниться, якщо цього зробити не можна, у такому випадку матриця з других похідних функції Лагранжа по швидкостях є виродженою. Введемо позначення

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\,, \tag{1}$$

ця матриця називається *гессіаном*. Механічна система є *виродженою*, якщо $\det\Gamma = 0$. Для такої системи не можна однозначно розв'язати основну задачу механіки без додаткового аналізу.

Інша ситуація, де проявляється виродженість є перехід від механіки Лагранжа до механіки Гамільтона. Перший крок перетворення Лежандра полягає у вираженні швидкостей через імпульси із співвідношення

$$p_i = \frac{\partial L(q,v,t)}{\partial v_i} = p_i(q,v,t)\,,$$

з подальшою підстановкою до означення функції Гамільтона $H = p_i v_i - L$. За теоремою про неявну функцію, таке рівняння можна розв'язати відносно швидкостей, якщо $\det\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \neq 0$, що еквівалентно умові невиродженості теорії. Крім того, гессіан є якобіаном переходу до фазового простору:

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,v)} = \det\Gamma\,.$$

Якщо теорія вироджена, то провести перетворення Лежандра неможливо. Досить часто це проявляється у тому, що деякі швидкості не фігурують у виразах для імпульсів. Таким чином,

- у виродженій теорії не можна однозначно знайти закон руху системи засобами механіки Лагранжа;
- у виродженій теорії не можна не можна перейти до гамільтонового формулювання.

На перший погляд може видатись, що виродженість є екзотичним окремим випадком, але це не зовсім так. Дійсно, серед суто механічних систем досить важко знайти вироджені, але їх досить багато серед польових. Оскільки методи Лагранжа та Гамільтона фактично без змін можна використовувати у теоріях поля, то проблема виродженості виникне там у аналогічному до викладеного контексті. Усі фізичні взаємодії доводиться описувати виродженими теоріями (у першу чергу це стосується електромагнітного та гравітаційного полів). Крім того, перехід до квантової теорії здійснюється на основі гамільтонового формулювання, яке для виродженої теорії безпосередньо побудувати не можна.

Уперше послідовний аналіз вироджених механічних та польових теорій провів Дірак як раз у зв'язку з проблемою квантування. Тут буде розглянуто стислий огляд проблеми виродженості, більш детально з цими та іншими питаннями можна ознайомитись, наприклад, у [2], [3] або [4]. Для спрощення виразів розглянемо випадок, коли функція Лагранжа явно не залежить від часу.

2. Первинні зв'язки. Якщо $\det\Gamma = 0$, то прискорення у рівняннях Лагранжа не можна знайти однозначно. У системі лінійних рівнянь вигляду

$$\Gamma_{ij}\dot{v}_j = -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\, v_j \,.$$

змінні $\dot{v}_j$ можна знайти тільки з точністю до довільних доданків. Дійсно, для виродженої матриці з рангом m, що менший за її розмірність n, існують вектори τ_i з властивістю

$$\Gamma_{ij}\tau^a_j = 0\,, \quad a = \overline{m, n}\,,$$

тоді, якщо $\eta_i(q,v)$ — частинний розв'язок рівнянь руху відносно прискорень, то загальний розв'язок матиме вигляд:

$$\dot{v}_i = \eta_i(q,v) + u_a(t)\tau^a_i\,,$$

де $u_a(t)$ — довільні коефіцієнти. Очевидно, $\Gamma_{ij}\dot{v}_j = \Gamma_{ij}\eta_j$.

Така сама неоднозначність виникає і у перетворенні Лежандра. У більшості випадків виявляється, що частина рівнянь $p_i = \frac{\partial L(q,v,t)}{\partial v_i}$ не залежить від швидкостей і зводяться до виразів типу

$$\Phi^{(1)}_a(q,p) = 0\,. \tag{2}$$

Ці рівняння називаються *первинними зв'язками*. Оскільки підстановка вихідних рівнянь $p_i = p_i(q,v)$ до первинних зв'язків дає тотожності

$$\Phi^{(1)}_a\big(q, p(q,v)\big) \equiv 0\,,$$

то диференціюючи їх по швидкостях, матимемо:

$$0 = \frac{\partial\Phi^{(1)}_a}{\partial v_i} = \frac{\partial\Phi^{(1)}_a}{\partial p_j}\frac{\partial p_j(q,v)}{\partial v_i} = \Gamma_{ij}\frac{\partial\Phi^{(1)}_a}{\partial p_j}$$

тобто вектори τ_i^a можна ототожнити з похідними первинних зв'язків:

$$\tau_i^a = \frac{\partial \Phi_a^{(1)}}{\partial p_i}\,. \tag{3}$$

Аналогічно можна знайти похідну по координатах.

Таким чином, у виродженій теорії імпульси не можна вважати однозначними функціями швидкостей, а координати фазового простору не можна вважати незалежними.

3. Вирази для швидкостей і рівняння Гамільтона. Як і для рівнянь руху, у перетворенні Лежандра швидкості не можна однозначно виразити через імпульси з виразів $p_i = p_i(q,v)$. У такому випадку загальні вирази для швидкостей матимуть вигляд:

$$v_i = v_i(q,p) - \lambda_a \tau_i^a \tag{4}$$

де $v_i(q,p)$ — частинний розв'язок рівнянь $p_i = p_i(q,v)$, а λ_a — довільні множники. Розглянемо структуру імпульсів та функції Лагранжа у такій ситуацій. Якщо

$$v_i \to \bar{v}_i = v_i - \lambda_a \tau_i^a\,,$$

то імпульс матиме вигляд:

$$\begin{aligned} p(q,\bar{v}) = p(q, v-\lambda\tau) = \left|\begin{matrix}\text{формула}\\ \text{Тейлора}\end{matrix}\right| &= p_i(q,v) - \lambda_a \tau_j^a \frac{\partial p_i}{\partial v_j} + \frac{1}{2}\,(\lambda_a \tau_j^a)(\lambda_b \tau_k^b)\frac{\partial^2 p_i}{\partial v_j \partial v_k} + \ldots \\ &= p_i(q,v) - \lambda_a \tau_j^a \Gamma_{ij} + \frac{1}{2}\,\lambda_a \lambda_b \tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k} + \ldots \end{aligned}$$

Другий доданок зникає у силу означення векторів τ, для перетворення третього скористаємось тим, що $\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k}$ є третьою похідною функції Лагранжа і, відповідно, симетричним по всіх індексах об'єктом. Тому

$$\tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k} = \tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial v_i} = \tau_j^a \frac{\partial}{\partial v_i}\left[\Gamma_{jk}\tau_k^b\right] - \tau_j^a \Gamma_{jk}\frac{\partial \tau_k^b}{\partial v_i} = 0\,,$$

усі доданки зникають за рахунок згорток з матрицею Γ. Аналогічно можна довести, що всі доданки у формулі Тейлора дорівнюють тулю. Таким чином,

$$p_i(q,\bar{v}) = p_i(q,v)\,.$$

Так само можна перетворити аргументи функції Лагранжа:

$$L(q,\bar{v}) = L(q, v-\lambda\tau) = L(q,v,t) - \lambda_a \tau_i^a \frac{\partial L}{\partial v_i} + (\lambda_a \tau_i^a)\lambda_b \tau_j^b \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} + \ldots$$

Як у попередньому обчисленні, доданки у сумі, починаючи з третього зникатимуть. Остаточно:

$$L(q,\bar{v}) = L(q,v) - \lambda_a \tau_i^a \frac{\partial L}{\partial v_i} \equiv L(q,v) - \lambda_a \tau_i^a p_i(q,v)\,, \tag{5}$$

у останньому доданку виникає означення імпульсу у формалізмі Лагранжа.

Для енергії аналогічне обчислення дає:

$$\mathcal{E}(q,\bar v) = \bar v_i p_i(q,\bar v) - L(q,\bar v)$$
$$= p_i(q,v)(v_i - \lambda_a\tau_i^a) - \big[L(q,v) - \lambda_a\tau_i^a p_i(q,v)\big] = \mathcal{E}(q,v)\,,$$

тобто $\mathcal{E}$ не залежить від неоднозначності швидкостей.

Якщо дотримуватись стандартної процедури побудови функції Гамільтона, то довільні множники λ виникатимуть і у виразі для H. Дійсно, позначивши $v_i(q,p)$ частинний розв'язок для швидкостей і вважаючи імпульси незалежними параметрами, матимемо:

$$H = p_i v_i - L(q,v) = \left|\begin{matrix}\text{підстановка}\\ v_i = v_i(q,p) - \lambda_a\tau_i^a\end{matrix}\right|$$
$$= p_i v_i(q,p) - L\big(q, v(q,p)\big) + \lambda_a\tau_i^a\left(\frac{\partial L}{\partial v_i} - p_i\right)\,,$$

у останньому доданку похідну функції Лагранжа не було замінено імпульсом, оскільки ця величина за походженням є підстановкою швидкостей до функції $p_i(q,v)$ і у виродженому випадку для частини швидкостей відрізнятиметься від p_i як незалежного параметру. Сума у цій комбінації неповна, у ній фігуруватимуть тільки доданки, які відповідають первинним зв'язкам, тому із означення останніх випливає:

$$H(q,p;\lambda) = \underbrace{p_i v_i(q,p) - L\big(q,v(q,p)\big)}_{=H(q,p)} + \lambda_a\Phi_a^{(1)}(q,p)\,. \tag{6}$$

Таким чином, функція Гамільтона також включає довільні невідомі множники. Останні доданки зникатимуть тільки на первинних зв'язках. Запишемо рівняння Гамільтона, які *формально* випливають з (6), якщо (q,p) вважати незалежними змінними:

$$\begin{aligned}\dot q_i &= \frac{\partial H(q,p;\lambda)}{\partial p_i} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} + \lambda_a\frac{\partial\Phi_a^{(1)}(q,p)}{\partial p_i}\,,\\ \dot p_i &= -\frac{\partial H(q,p;\lambda)}{\partial q_i} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} - \lambda_a\frac{\partial\Phi_a^{(1)}(q,p)}{\partial q_i}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Рівняння руху у такій формі були записані Діраком. Оскільки у цих рівняннях фігурують довільні множники, то без детального аналізу нових зв'язків їх розв'язати, очевидно, не можна.

4. Варіаційний принцип у виродженій теорії. Для з'ясування фізичного змісту невизначених множників розглянемо варіаційний принцип у формальному $3n$-вимірному просторі:

$$S_{mod}[q,v,p] = \int_{t_1}^{t_2}\big[L(q,v) + p_i(\dot q_i - v_i)\big]dt\,.$$

Врахування рівнянь $p_i = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v_i}$ у безпосередньому вигляді дає варіаційний принцип у просторі швидкостей (q,p) (виключаємо імпульси), а у вигляді обернених співвідношень $v_i = v_i(q,p)$ — у фазовому просторі (q,p). Зараз актуальним є другий підхід, у якому потрібно врахувати, що не всі швидкості можна виразити через імпульси. Також необхідно взяти до уваги появу первинних зв'язків.

Якщо позначити

$$L_{mod}(q,v,p) = L(q,v) + p_i(\dot{q}_i - v_i)\,, \quad H_{mod}(q,v,p) = p_i v_i - L(q,v)$$

то функціонал дії модна подати у формі

$$S_{mod}[q,v,p] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L_{mod}\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[p_i\dot{q}_i - H_{mod}\right] dt\,.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} = -\frac{\partial L_{mod}}{\partial q_i}\,, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = p_i - \frac{\partial L_{mod}}{\partial v_i}\,, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} = v_i\,. \tag{8}$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа матимуть вигляд:

$$\frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i\,, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} = \dot{q}_i\,, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = 0\,. \tag{9}$$

Для невиродженої теорії така система повністю еквівалентна до систем рівнянь Лагранжа або Гамільтона (залежно від того, як виключити зайві змінні за допомогою зв'язків $\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = 0$).

У виродженій теорії для спрощення занумеруємо координати q_i так, щоб у гессіані відмінний від нуля мінор був розташований у лівому верхньому кутку, тоді

$$q = (q_\alpha, q_a)\,, \quad \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}\right) \neq 0\,.$$

Для індексів $\alpha = \overline{1,N}$ рівняння зв'язків можна розв'язати:

$$p_\alpha - \frac{\partial L(q,v)}{\partial v_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = v_\alpha(q,v,p_\alpha)\,.$$

Для іншої групи швидкостей у рівняннях зв'язків можна виконати підстановку знайдених швидкостей:

$$\left[p_a - \frac{\partial L(q,v)}{\partial v_a}\right]_{v_\alpha = v_\alpha(q,v,p_\alpha)} := \Phi_a^{(1)} = 0\,, \quad a = \overline{N+1,n}\,.$$

У результаті буде отримано вираз, який повністю не залежить від швидкостей v_α (якби залежав, то можна було б виразити ще частину швидкостей). Така функція і буде первинним зв'язком $\Phi_a^{(1)}$ на координати та імпульси (імпульси входять до всіх рівнянь). Це збігається з попередніми позначеннями, де слід покласти

$$\tau_i^a = \delta_{ia}$$

завдяки введеній нумерації (компоненти вектора будуть або одиницями, або нулями завдяки означенню функції, нулі будуть там, де компоненту швидкості знайдено).

Підстановка знайдених швидкостей до функції Гамільтона дає функцію, у якій частково залишаються швидкості:

$$H_{red}(q,p,v_a) = H_{mod}\big(q,p,v_\alpha(q,p_\alpha),v_a\big)\,.$$

Очевидно:

$$\frac{\partial H_{red}}{\partial p_i} = \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} + \underbrace{\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_\alpha}}_{=0}\frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i}\right|_{v_\alpha=v_\alpha(q,p_\alpha)},$$

$$\frac{\partial H_{red}}{\partial q_i} = \frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_\alpha}}_{=0}\frac{\partial v_\alpha}{\partial q_i} = \left.\frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i}\right|_{v_\alpha=v_\alpha(q,p_\alpha)},$$

тому після підстановки частини швидкостей рівняння руху (9) набудуть вигляду:

$$\dot p_i = -\frac{\partial H_{red}}{\partial q_i}\,,\quad \dot q_i = \frac{\partial H_{red}}{\partial p_i}\,,\quad \Phi_a^{(1)}(q,p) = 0\,. \tag{10}$$

Вигляд функції H_{red} можна знайти детальніше, якщо скористатись другою з тотожностей (8):

$$H_{red}(q,p,v_a) = \big[p_i v_i - L(q,v)\big]_{v_\alpha=v_\alpha(q,p_\alpha)} = \left[v_i\frac{\partial L}{\partial v_i} - L + v_i\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i}\right]_{v_\alpha=v_\alpha(q,p_\alpha)}.$$

Перші два доданки описують енергію у механіці Лагранжа, а у останньому доданку виникають первинні зв'язки:

$$H_{red}(q,p,v_a) = H(q,p) + v_a\Phi_a^{(1)}\,,\quad H(q,p) = \left[v_i\frac{\partial L}{\partial v_i} - L\right]_{v_\alpha=v_\alpha(q,p_\alpha)}$$

Функція $H(q,p)$ є енергією, яку виражено через імпульси підстановкою швидкостей v_α. У невиродженій теорії вона і є функцією Гамільтона. У виродженій теорій вона насправді не залежить від швидкостей v_a. Щою встановити характер функціональних залежностей, розглянемо варіацію енергії $\mathcal{E}$ при незалежних змінах швидкостей та координат:

$$\delta\mathcal{E}(q,v) = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_i}\,\delta v_i = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q_i}\,\delta q_i + v_i\,\frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial v_j}\,\delta v_j\,.$$

Виразимо останній доданок через варіації імпульсів, які стануть аргументами енергії після переходу до фазового простору:

$$\delta p_i(q,v) = \delta\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial q_i}\,\delta q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial v_j}\,\delta v_j\,,$$

для виродженої теорії безпосередньо виразити δv_i через δp_i не можна через виродженість гессіану, але у даному перетворенні у цьому немає потреби, оскільки у формулі для δp_i варіації швидкостей фігурують разом з матрицею, тому

$$\delta \mathcal{E}(q,v) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_j} - v_i \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial q_j} \right) \delta q_j + v_i \delta p_i(q,v)$$

Після підстановки швидкостей v_α у останньому доданку імпульси p_i стануть незалежними змінними[1]. Оскільки варіації швидкостей зникають у цьому виразі, то швидкості не є реальними аргументами функції H. Крім того, з побудови функції H випливає, що вона не залежить від імпульсів p_a, оскільки швидкості v_α вносять залежності тільки від p_α.

Таким чином, функція Гамільтона, що визначає динаміку виродженої системи, має вигляд:

$$H_{red}(q,p,v_a) = H(q,p_\alpha) + v_a \Phi_a^{(1)}(q,p) \tag{11}$$

де $H(q,p_\alpha)$ є енергією Лагранжа, вираженою через імпульси. Саме функцію і будемо називати функцією Гамільтона виродженої системи, тоді як весь вираз (11) — повною функцією Гамільтона. Порівняння з виразом (6) дозволяє встановити фізичний зміст невизначених множників λ_a: вони є швидкостями, які не можна виразити під час перетворення Лежандра.

Рівняння руху для H_{red} мають такий самий вигляд, як раніше (див. (7)). Для скорочення запису використаємо дужки Пуассона

$$[A,B] = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\,,$$

де імпульси та координати *формально* вважаються незалежними. Тоді

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, H_{red}] = [q_i, H] + v_a [q_i, \Phi_a^{(1)}]\,, \\ \dot{p}_i &= [q_i, H_{red}] = [p_i, H] + v_a [p_i, \Phi_a^{(1)}]\,, \end{aligned} \tag{12}$$

до цих рівнянь потрібно додати рівняння зв'язків $\Phi^{(1)} = 0$. Зауважимо, що користуватись рівняннями зв'язків до обчислення дужок Пуассона (тобто відкидати їх у H_{red}) *не можна*, оскільки означення дужок Пуассона взято з теорії, де (q,p) є незалежними змінними, а первинні зв'язки задають співвідношення між координатами та імпульсами. Тому підставляти первинні зв'язки слід тільки після всіх виконаних обчислень. Роль дужок Пуассона полягає тут тільки у скороченні записів.

Для подальшого аналізу виродженої теорії потрібно провести детальний аналіз ролі первинних зв'язків. Виявляється, що це дозволяє позбавитись від частини невідомих множників у рівняннях руху та з'ясувати фізичний зміст тих множників, що залишаються.

5. Аналіз зв'язків у виродженій теорії. Подальший аналіз рівнянь руху виродженої системи полягає в узгодженні зв'язків з динамікою системи. Оскільки рух системи відбувається із обмеженнями, які накладають зв'язки, то останні

[1] Незалежність енергії від неоднозначності швидкостей було показано раніше, зараз розглянуто інший спосіб цього доведення.

мають виконуватись у довільний момент часу, тобто

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_a^{(1)} = 0\,.$$

Таку умову часто називають умовою несуперечливості. Використовуючи запис повної похідної за допомогою дужок Пуассона, матимемо:

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_a^{(1)} = [\Phi_a^{(1)}, H + v_b\Phi_b^{(1)}] = [\Phi_a^{(1)}, H] + v_b[\Phi_b^{(1)}, \Phi_b^{(1)}] = 0\,. \qquad (13)$$

Зауважимо, що дужку Пуассона $[\lambda_a, H]$ неозначено. Однак у правій частині вона буде домножуватись на зв'язок $\Phi_a^{(1)}$, який зараз *можна* покласти рівним нулю, оскільки в умові вважається, що рух системи відбувається без порушення зв'язків $\Phi_a^{(1)}$ (тобто на поверхні фазового простору, яку вони визначають).

Згідно з термінологією Дірака співвідношення, які дорівнюють нулю тільки на поверхнях зв'язків називаються *слабкими рівностями* на противагу *сильним рівностям*, які виконуються скрізь у фазовому просторі.

Обчислення у правій частині приводять до одного з наслідків:

1) буде отримано рівність типу $0 = 0$ (можливо, з врахуванням самих рівнянь зв'язків);
2) буде отримано рівність типу $1 = 0$, тоді функція Лагранжа некоректна;
3) буде отримано деяке співвідношення з координатами та імпульсами, але без параметрів v_a, яке не зводиться до зв'язків $\Phi^{(1)}$ та їх комбінацій;
4) буде отримано деяке співвідношення з координатами та імпульсами та параметрами v_a. Так буде у випадку, коли ранг матриці $[\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]$ менший за n.

Перший випадок означає, що подальшого аналізу зв'язків проводити не потрібно і зв'язки повністю узгоджені з рівняннями руху. Другий випадок ігноруватимемо, вважаючи теорію фізично правильно. У третьому випадку з'являються нові обмеження на координати фазового простору, які є новими зв'язками, які називаються *вторинними*. У останньому випадку, якщо деякі з невідомих коефіцієнтів v_a фігурують у рівнянні несуперечливості, то їх можна знайти з системи лінійних рівнянь (або принаймні виразити через інші невідомі коефіцієнти) і підставити до повної функції Гамільтона. Цей випадок найбільш загальний і включає попередній як граничний (коли не можна знайти жоден з параметрів v_a). Розглянемо детальніше пошук невідомих швидкостей. Рівняння (13) можна записати так:

$$[\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]v_b = -[\Phi_a^{(1)}, H]\,, \quad \gamma_{ab}^{(1)} = [\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]$$

(цифра у дужках та підіндекси у індексах позначають номер етапу). Якщо матриця $\{\gamma_{ab}^{(1)}\}$ вироджена, то швидкості v_a можна знайти з точністю до довільних величин, які позначимо $v_{a_1}^{(1)}$ (межі зміни a_1 визначаються рангом лінійної системи рівнянь, для спрощення записів не будемо вводити додаткових позначень для цього):

$$v_b = v_b(q,p) + \tau^{(1)}{}_b^{a_1} v_{a_1}^{(1)}\,, \quad \text{де } \gamma_{ab}^{(1)}\tau^{(1)}{}_b^{a_1} = 0,$$

де $v_b(q,p)$ — частинний розв'язок системи лінійних рівнянь. Підстановка до функції Гамільтона:

$$H_{red} = H + v_a\Phi_a^{(1)} = \underbrace{\left[H + v_a(q,p)\Phi_a^{(1)}\right]}_{=H^{(1)}} + v_{a_1}\tau^{(1)a_1}_{\ a}\Phi_a^{(1)}\,.$$

Співвідношення, які не залежать від швидкостей і єє вторинними зв'язками можна отримати, домножаючи рівняння узгодженості на вектори $\tau^{(1)a_1}$:

$$\tau^{(1)a_1}_{\ a}[H, \Phi_a^{(1)}] = 0\,.$$

Ті з співвідношень, які не зводяться до тривіальних рівностей та комбінацій первинних зв'язків є вторинними зв'язками, які позначимо

$$\Phi_{a_1}^{(2)} = \tau^{(1)a_1}_{\ a}[H, \Phi_a^{(1)}] = 0$$

Таким чином, перший етап процедури узгодження дає можливість уточнити функцію Гамільтона підстановкою частини невідомих швидкостей (як правило, одну частину швидкостей виражають через іншу), яка тепер має вигляд

$$H_{red} = H^{(1)} + v_{a_1}\Phi_{a_1}^{(1)}$$

(вектори $\tau^{(1)a_1}_{\ a}$ можна об'єднати з невідомими величинами не змінюючи позначень) і знайти нові обмеження на рух системи у вигляді вторинних зв'язків. Рівняння руху з уточненою функцією Гамільтона можна записати так само, як і для вихідної функції H.

Зауваження. Відмінність між сильними та слабкими рівностями проявляється під час варіювання: слабка рівність у загальному випадку порушиться для довільних варіацій δq та δp (вони можуть виводити за поверхню зв'язків), а сильна — ні. Саме з цієї причини зв'язки не відкидались у варіаційному принципі та у рівняннях руху: як бачимо, не обов'язково на всій поверхні $\Phi_a^{(1)}$ похідні цих зв'язків дорівнюють нулю, а тільки на тій частині, що додатково обмежується вторинними зв'язками $\Phi^{(2)}$. ⌟

Якщо у теорії з'явились вторинні зв'язки, то їх слід також узгодити з динамікою, тобто потрібно вимагати

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_{a_1}^{(2)} = [\Phi_{a_1}^{(2)}, H^{(1)}] + v_{b_1}[\Phi_{a_1}^{(2)}, \Phi_{b_1}^{(1)}] = 0\,.$$

Висновки з цих рівностей аналогічні до попередніх: або зв'язки вже узгоджені з динамікою, або дозволяють знайти деякі невідомі швидкості та отримати нові (третинні) зв'язки $\Phi_{a_3}^{(3)}$. Знайдені швидкості слід підставити їх до функції Гамільтона, тоді

$$H_{red} = H^{(2)} + v_{a_2}\Phi_{a_2}^{(1)}$$

(межі зміни у останній сумі визначаються рангом лінійної системи рівнянь на швидкості).

Процедура узгодження продовжується скінченну кількість кроків[2] доти, поки в узгодженні є потреба (тобто з'являються нові зв'язки та можливість знайти частину швидкостей). На завершення процедури матимемо повний набір узгодже-

[2] Оскільки число ступенів вільності скінченне.

них зв'язків, які остаточно обмежують область руху системи, та вираз для повної функції Гамільтона (позначимо H^*), де виключено невідомі швидкості (всі або частину). Розділяти зв'язки за номером етапу, на якому вони з'явились (вторинні, третинні тощо), немає потреби, всі нові зв'язки є рівноправними і їх можна позначати однаково. Серед інших тільки первинні зв'язки є особливими, оскільки можуть залишитись у повній функції Гамільтона разом з невираженими швидкостями. Будемо позначати усі зв'язки Φ_A, а для окремо взятих первинних збережемо старе позначення $\Phi^{(1)}_a$.

Якщо всі зв'язки узгоджені з динамікою, то їх похідні по часу на поверхнях руху системи дорівнюють нулю, іншими словами похідна довільного зв'язку є лінійною комбінацією інших:

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_A = \sum_B C_B \Phi_B := \{\Phi\}\,,$$

у правій частині введено позначення для скороченого запису лінійної комбінації зв'язків. Вирази для функцій Φ_A можна спростити врахувавши, що на всіх проміжних етапах явно використовувались первинні зв'язки (одразу після запису дужок Пуассона). Системи вторинних зв'язків Φ_A та $\bar{\Phi}_A$ еквівалентні, якщо

$$\bar{\Phi}_A = M_{AB}\Phi_B + \{\Phi^{(1)}\}\,,$$

де M_{AB} — деякі коефіцієнти (не можна змінювати тільки первинні зв'язки).

Незважаючи на громіздкість у загальному формулюванні, наведена процедура є досить ефективною у конкретних задачах (де не потрібно вводити додаткових позначень). Для спрощення фізичного аналізу вироджених теорій Дірак запропонував додаткову класифікацію всіх функцій динамічних змінних (q, p). Функція $F(q, p)$ називається *величиною першого роду*, якщо її дужка Пуассона з довільним зв'язком є лінійною комбінацією зв'язків:

$$[F, \Phi_A] = \{\Phi\}$$

(тобто дорівнює нулю на поверхні зв'язків). Відповідно функція $F(q, p)$ буде *величиною другого роду*, якщо ця властивість не виконується. Виявляється, що дужка Пуассона зберігає належність до першого роду:

Якщо F_1 та F_2 є величинами першого роду, то $[F_1, F_2]$ також є величиною першого роду.

□ За означенням $[F_{1,2}, \Phi_A] = C^{(1,2)}_{AB}\Phi_B$. Знайдемо дужки Пуассона $[F_1, F_2]$ з довільним зв'язком, використовуючи тотожність Якобі:

$$[\Phi_C, [F_1, F_2]] = -[F_1, [F_2, \Phi_C]] - [F_2, [\Phi_C, F_1]] = -C^{(2)}_{CD}[F_1, \Phi_D]] + C^{(1)}_{CD}[F_2, \Phi_D] = \{\Phi\}\,,$$

що і потрібно було довести. ■

Таку класифікацію можна застосувати і до самих зв'язків. Якщо матриця $[\Phi_A, \Phi_B]$ невироджена, то кажуть, що Φ_A є системою зв'язків другого роду. Якщо ж це не так, то Φ_A — система зв'язків другого роду. Виявляється, що аналізувати механічну систему зі зв'язками кожного типу простіше.

6. Вироджені системи зі зв'язками другого роду. Опускаючи детальні доведення (вони досить громіздкі), наведемо загальну схему аналізу систем, у яких всі зв'язки є змінними другого роду. Тоді

$$\det[\Phi_A, \Phi_B] \neq 0 \quad (\text{також на поверхнях } \Phi_A = 0)\,.$$

У такому випадку кажуть, що система має зв'язки другого роду, всі невідомі швидкості можна знайти з умов узгодженості:

$$\frac{d\Phi_A}{dt} = [\Phi_A, H^*] + v_a[\Phi_A, \Phi_a^{(1)}] = 0\,,$$

де H^* — функція Гамільтона, модифікована після всіх стадій узгодження. Звідси випливає, що

$$v_a = -[\Phi, \Phi]^{-1}_{aA}[\Phi_A, H] + \{\Phi\}$$

(комбінація $\{\Phi\}$ не включає первинних зв'язків, H^* замінено на H, оскільки ці величини відрізняються тільки на комбінацію зв'язків). Таким чином, після аналізу умов узгодженості функції $v_a(q,p)$ у рівняннях руху можна вважати відомими ще *обчислення дужок Пуассона*. Квадратичні по зв'язках доданки у функції Гамільтона можна одразу покласти рівними нулю на тому самому етапі, оскільки результат обчислення буде знову пропорційним до зв'язків. Підстановка знайдених швидкостей до повної функції Гамільтона дає:

$$H_{red} = H + v_a\Phi_a^{(1)} = H - \Phi_a^{(1)}[\Phi, \Phi]^{-1}_{aA}[\Phi_A, H]\,.$$

Не змінюючи виразу на поверхні зв'язків, у лівій частині можна додати відняти квадратичну по Φ комбінацію

$$\Phi_A[\Phi, \Phi]^{-1}_{AB}[\Phi_B, H]$$

(у першому множнику первинні зв'язки відсутні), тоді матимемо:

$$H_{red} \to H_{red} = H - \Phi_A[\Phi, \Phi]^{-1}_{AB}[\Phi_B, H] = H + v_A\Phi_A\,,$$

тепер у правій частині фігурують усі зв'язки зі своїми множниками v_A. Для нової функції Гамільтона з умов узгодженості випливає

$$v_A = -[\Phi, \Phi]^{-1}_{AB}[\Phi_B, H] + \{\Phi\}$$

а рівняння руху матимуть вигляд:

$$\dot{q}_i = [q_i, H_{red}]\,, \quad \dot{p}_i = [p_i, H_{red}]\,, \quad H_{red} = H + v_A\Phi_A\,,$$

ці рівняння на поверхні зв'язків еквівалентні рівнянням з вихідною функцією Гамільтона, яка включає тільки первинні зв'язки. Таким чином, у теорії зі зв'язками другого роду до функції Гамільтона можна внести усі зв'язки (завдяки чому вони стають рівноправними).

Для скорочення запису замість дужки Пуассона зручно означити іншу комбінацію

$$[A, B]^* = [A, B] - [A, \Phi_A] \cdot [\Phi, \Phi]^{-1}_{AB} \cdot [\Phi_B, B]\,, \tag{14}$$

яка називається *дужками Дірака*, тоді рівняння руху можна записати так:

$$\dot{q}_i = [q_i, H]^*\,, \quad \dot{p}_i = [p_i, H]^*\,, \quad \Phi_A = 0\,.$$

Легко показати, що алгебраїчні властивості дужки Дірака такі самі, як і у дужки Пуассона:

1) $[A, B]^* = -[B, A]^*\,,$
2) $[A, BC]^* = B[A, C]^* + [A, B]^* C\,,$
3) $[A, [B, C]^*]^* + [B, [C, A]^*]^* + [C, [A, B]^*]^* = 0\,,$
4) $[A, \Phi_A]^* = 0$ для довільного зв'язку Φ_A (рівність нулю буде скрізь).

З останньої властивості випливає, що зв'язки можна покладати рівними нулю до обчислення дужки Дірака.

Таким чином, теорія зі зв'язками першого робу фактично аналогічна до невиродженої теорії із заміною дужок Пуассона на дужки Дірака, а сама функція Гамільтона збігається з енергією (її не потрібно модифікувати, відповідні зміни вже враховано у виразі для дужок Дірака). Для неї можна побудувати аналоги канонічних перетворень (для таких перетворень дужки Дірака, як і дужки Пуассона не змінюються) і максимально спростити функцію Гамільтона та зв'язки. Найчастіше шукають таке перетворення, для якого зв'язки еквівалентні рівності нулю частини координат (які можна виключити з рівнянь).

Задача 1. Типовим прикладом виникнення виродженості є функція Лагранжа, лінійна по швидкостях. У фізичних задачах вона може породжуватись граничним переходом. Наприклад, нехай частинка перебуває у сталому магнітному полі $\vec{H} = H\vec{e}_z$, тоді для руху у площині (x, y)

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eH}{2c}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) - U(x, y)\,.$$

У випадку дуже сильного магнітного поля кінетичною енергією можна знехтувати. Побудувати функцію Гамільтона, визначити зв'язки, знайти дужки Дірака для канонічних змінних.

7. Вироджені системи зі зв'язками першого роду. У випадку, коли

$$\det[\Phi_A, \Phi_B] = 0\,,$$

то не всі множники Лагранжа можна виразити через координати (q, p) і кажуть, що дана механічна система є системою зі зв'язками першого роду. У такому випадку частина первинних зв'язків залишається у формулі для повної функції Гамільтона разом з деякими швидкостями, які є довільними невідомими функціями часу:

$$H_{red} = H^* + v_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}\,,$$

де H^* позначає функцію Гамільтона, у якій враховано знайдені швидкості (і, тим самим, частина зв'язків), а підсумовування ведеться тільки по частині швидкостей. Розв'язок рівнянь руху буде залежати від довільних величин $v_\alpha(t)$ і механічний стан системи буде знайдено неоднозначно. У механіці Лагранжа така ситуація відповідатиме аналогічній залежності координат $q_i(t)$, оскільки задача Коші для виродженої теорії не має однозначного розв'язку.

Таким чином, заданих початкових умов, які повністю задають початковий стан у системі зі зв'язками першого роду не можна однозначно виразити механічні стани у наступні моменти часу як набори координат (q, p). Однак це не означає, що задачу про рух такої системи розв'язати не можна: насправді шукати усі координати (q, p) і не потрібно, оскільки рух відбувається на поверхні зв'язків і координати на поверхні руху задовольняють рівняння $\Phi_A = 0$. У даній ситуації було б доцільно провести перетворення координат так, щоб чітко відділити залежні координати від незалежних. Цілком можливо, що неоднозначно визначатимуться ті ступені вільності, які реально не беруть участі у динаміці. Сам механічний стан системи у загальнофізичному розумінні не повинен залежати від довільних величин. Це і є характерною особливістю систем зі зв'язками першого роду: у результаті розв'язку рівнянь руху для *всіх* координат (q, p) буде отримано не еволюцію одного механічного стану від початкового моменту часу, а еволюцію набору станів, які нумеруються довільними функціями і включають одну й ту саму *фізичну* інформацію про рух системи, яку закладено у механічному стані, обмеженому на поверхню руху. На поверхнях зв'язків такі стани будуть еквівалентними (можливо, з точністю до простої заміни координат).

Розглянемо роль зв'язків першого роду у динаміці системи. У першу чергу відмітимо, що за рахунок означення величин першого роду

$$[\Phi_A, \Phi_\alpha^{(1)}] = \{\Phi\}\,,$$

для довільних зв'язків Φ_A (незалежно від того, первинних, чи ні). Тоді, оскільки зв'язки вже узгоджені з динамікою, то

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_A = [\Phi_A, H^*] + v_\alpha[\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_A] = \{\Phi\} \quad \Rightarrow \quad [\Phi_A, H^*] = \{\Phi\}\,,$$

тобто функція Гамільтона H^* є величиною першого роду, її дужка Пуассона пропорційна до зв'язків і зникає на їх поверхні. Якщо побудувати довільну лінійну комбінацію первинних зв'язків першого роду з малими коефіцієнтами ε_α, то

$$[\varepsilon_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, H^*] = \{\Phi\}\,.$$

Цей вираз аналогічний формулі для зміни функції Гамільтона у результаті нескінченно малого канонічного перетворення, яке задано за допомогою генератора $G = \varepsilon_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}$. Таким чином, первинні зв'язки першого роду можна розглядати як генератори нескінченно малих канонічних перетворень, які є симетріями функції Гамільтона H^* *на поверхні зв'язків* (оскільки δH^* є лінійною комбінацією зв'язків). Нескладно показати, що додавання до функції Гамільтона *всіх* зв'язків першого роду (не тільки первинних) не змінює рівнянь руху[3].

Розглянемо дію таких перетворень на довільну функцію повного механічного

[3] Нові доданки з вторинними зв'язками дають у рівняннях руху комбінації, пропорційні до зв'язків, що зникають на поверхні руху.

стану $F(q,p)$:

$$\delta F = [G,F]\,.$$

Таке перетворення не змінює фізичних величин у момент часу t і називається *калібрувальним перетворенням.*

Якщо послідовно виконати два такі перетворення з параметрами $\varepsilon^{(1)}$ та $\varepsilon^{(2)}$, то отримаємо:

$$F \to F_1 = F + [G_1,F] \to F_{12} = F_1 + [G_2,F_1] = F + [G_1,F] + [G_2,F] + [[F,G_1],G_2]\,,$$

якщо послідовність перетворень обернена (спочатку друге, а потім перше), то аналогічно:

$$F \to F_{21} = F + [G_2,F] + [G_1,F] + [[F,G_2],G_1]\,,$$

Результати різних послідовностей перетворень відрізнятимуться, різниця між ними складатиме

$$\delta_{[12]}F = F_{12} - F_{21} = [[F,G_1],G_2] - [[F,G_2],G_1] = [[G_2,G_1],F]\,,$$

де використано тотожність Якобі для дужок Пуассона. Оскільки генератори перетворень є лінійними комбінаціями зв'язків першого роду, то їх дужка Пуассона також є лінійною комбінацією цих зв'язків, причому тільки першого розу згідно з доведеним твердженням про дужки Пуассона, однак до неї тепер можуть входити інші зв'язки першого роду (не тільки первинні). Таким чином, канонічні перетворення, що не змінюють фізичної інформації про стан системи на поверхні зв'язків є всі зв'язки першого роду.

Для часової еволюції довільної функції динамічних змінних на інтервалі часу $[t, t+dt]$ матимемо:

$$\begin{aligned} F(t+dt) = F(t) + dt\frac{dF}{dt} + \dots = F(t) + dt[F, H_{red}] + \dots \\ = F(t) + dt[F,H^*] + v_\alpha dt[F,\Phi^{(1)}_\alpha] + \dots \end{aligned}$$

у правій частині швидкості є довільними. Якщо записати те саме для іншого вибору невідомих швидкостей v'_α, то отримаємо інше значення $F'(t+dt)$. Різниця між ними складатиме:

$$F'(t+dt) - F(t+dt) = dt(v'_\alpha - v_\alpha)[F,\Phi^{(1)}_\alpha] + \dots = \varepsilon_\alpha[F,\Phi^{(1)}_\alpha]\,,$$

де $\varepsilon_\alpha = dt(v'_\alpha - v_\alpha)$. У правій частині виникає зміна функції F у результаті канонічного перетворення з генератором $\varepsilon_\alpha\Phi^{(1)}_\alpha$. Це означає, що неоднозначність у описі еволюції механічного стану викликана тим, що зміна координат у часі супроводжується канонічним перетворенням з довільними параметрами, які змінюють стан в цілому у фазовому просторі, однак на поверхні зв'язків стани, що породжуються різними перетвореннями є еквівалентними, оскільки там вони є симетріями функції Гамільтона.

Залишилося деталізувати, що саме визначає "фізичну інформацію" у наборі (q,p) для виродженої теорії. Зрозуміло, що це мають бути функції координат фазового простору, що не змінюються у результаті канонічних перетворень, що породжуються зв'язками, тобто

$$[F_{phys}(q,p), \Phi_A] = \{\Phi\}\,,$$

де у лівій частині фігурують зв'язки першого роду. Як і у механіці Лагранжа, було б доцільно провести перетворення координат простору так, щоб зв'язки описувались максимально простими рівняннями вигляду $\Phi = q = 0$ або $\Phi = p = 0$. Таке відокремлення дійсно можна зробити, будуючи перетворення

$$(q,p) \to (Q,P;z;\dots)$$

Координати фазового простору, для яких не введено позначені еквівалентні до зв'язків. Зазначимо, що кількість нових координат та імпульсів тут може бути, тому позначимо (Q,P) саме спряжені пари змінних, а z — залишок координат, для яких немає відповідних імпульсів (точніше останні описують зв'язки). Тоді фізичними змінними є незалежними координатами (Q,P), що описують рух системи по поверхні зв'язків та довільні функції від них. Ці величини не змінюються у результаті перетворень зі зв'язками як з генераторами. Можна показати, що фізична функція Гамільтона H_{phys}, яку можна отримати підстановкою зв'язків до H^* у нових координатах, не буде залежати від змінних z. Виходить, що всі неоднозначності розв'язку рівнянь руху і зосереджено у координатах z, від яких не залежить жодна фізична величина.

У більшості випадків провести аналіз координат досить складно, тому використовують еквівалентну процедуру, яка зводиться до введення додаткових обмежень таким чином, щоб отримати фізично еквівалентну невироджену теорію. Фактично це зводиться до того, що для даних початкових умов з класу механічних станів, що описують подальшу еволюцію, відбирають по одному представнику. Фізичні висновки про рух не повинні залежати від способу вибору такого представника, ця вимога називається *калібрувальною інваріантністю* фізичних величин, я сама процедура зняття виродженості — яка називається *фіксацією калібровки* виродженої теорії. Вироджені теорії із зв'язками першого роду часто називають калібрувальними. Прикладом фіксації калібровки у введених координатах є постулювання конкретних виразів $z = z(Q,P)$ (фактично введення нових зв'язків) і подальшого виключання нефізичних змінних z, які не проявляються у спостережуваних ефектах. У деякому розумінні це аналогічно до виключення циклічних координат у невироджених теоріях. У загальному випадку, коли перетворення координат не виконується, йдеться про додаткові умови типу зв'язків (їх пошук досить складний і фактично еквівалентний перетворенню координат):

$$\chi_\alpha(q,p) = 0\,,$$

умови узгодженості для яких дозволяють визначити всі невідомі швидкості. Тим самим кількість незалежних координат (q,p) стає рівною $2n - 2m$, де m — число зв'язків та додаткових умов. За рахунок такого додаткового обмеження траєкторія еволюції механічного стану буде єдиною. Новий фазовий простір називається *редукованим*.

Для суто механічних систем досить важко знайти змістовні приклади теорій за зв'язками першого роду, однак таких прикладів достатньо у теорії поля. Електромагнітне та гравітаційне поля є типовими прикладами вироджених калібрувальних теорій. Деякі властивості електромагнітного поля у зв'язку з цим буде розглянуто далі.

Зауваження. У більшості випадків ознакою виродженості теорії є наявність нетривіальної симетрії функціоналу дії, яка випливає з природи змінних та способу його побудови. У класичній електродинаміці виродженість з'являється за рахунок калібрувального перетворення потенціалів (звідси й назва для загального випадку). ⌟

у [2], [3] або [4].

Література

[1] Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. *Класична механіка.* К.: ВПЦ "Київський Університет". 2008 — 480 с.

[2] Дирак П.А.М., *К созданию квантовой теории поля*, М.: Наука, 1990.

[3] Дирак П.А.М., *Лекции по квантовой механике*, М.: Мир, 1968.

[4] Гитман Д.М., Тютин И.В., *Каноническое квантование полей со связями*, М.: Наука, 1986.

Навчальне видання

Романенко Олександр Вікторович

Додаткові розділи класичної механіки: вироджені механічні системи

Методична розробка для студентів фізичного факультету

Оригінал-макет виготовлено автором
за допомогою видавничого пакета LaTeX2e

ПП «Elena and Co»
08001, м. Обухів Київської обл., вул. Шкільна, 16

Підписано до друку 12.10.2019	Формат 60х84 1/16
Папір друк. №1. Друк офсетний.	Умовн. друк. арк. 1.0
Наклад 100	Зам. №9-1289