Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Фізичний факультет

Методичні вказівки та задачі до курсу Класична механіка, Рівняння Лагранжа 2-го роду

Київ 2016

Методичні вказівки та задачі до курсу Класична механіка. Рівняння Лагранжа 2-го роду / Упорядники Субота С.Л., Макарець М.В. − Київ, 2016. – 51с.

Рецензенти: Колежук В. В., доктор фіз-мат. наук, професор
Бернацька Ю.М., кандидат фіз.-мат наук, доцент

Затверджено
Вченою радою
фізичного факультету
16 травня 2016 р.
протокол № 11

Передмова

В основу даного посібника покладено багаторічний досвід викладання авторами та їх колегами з кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка курсу класичної механіки на фізичному факультеті.

Успішне вивчення класичної механіки, як і будь-якого іншого розділу теоретичної фізики неможливе без розв’язування великої кількості задач. З одного боку практичні вміння обов’язкові для розуміння загальної теоретичної схеми, а з іншого – розвиток будь-якої науки є послідовністю постановки та розв'язку задач. Інколи буває так, що досить важко взагалі розділити теорію та практичне застосування. В класичній механіці є деяка центральна ідеологія – вісь, навколо якої обертається увесь предмет. Курс класичної механіки можна розбити на кілька внутрішньо завершених частин:

- векторна механіка Ньютона-Ейлера;
- аналітична механіка Лагранжа;
- аналітична механіка Гамільтона.

Даний посібник призваний допомогти читачу в опануванні другої частини курсу, а саме механіки Лагранжа. Він складається з теоретичної частини, списку задач та додатків.

Вимоги до необхідного рівня підготовки студента наступні:

- математичний аналіз: інтегральне та диференціальне числення однієї змінної, формула Тейлора, дослідження та побудова графіків функцій у декартових та полярних координатах, диференціювання функції багатьох змінних;
- диференціальні рівняння: розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку, однорідні та неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами;
- теорія функцій комплексної змінної: означення комплексних чисел, формула Ейлера;
- лінійна алгебра: обчислення визначників, розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, властивості лінійних та квадратичних форм;
- аналітична геометрія: означення та властивості добутків у тривимірному просторі, криві другого порядку;
- фізика: механіка у межах загального курсу.

Бажані також елементарні знання з теорії поля, зокрема диференціальні векторні операції; векторного та тензорного числення, зокрема матриці перетворень та означення тензорів; хоча необхідна інформація з цих та деяких інших питань наведена у додатках.

Основні поняття, закони і формули

Механіка Ньютона системи частинок.

Закон збереження енергії. Механічна система має n матеріальних точок, кожна з яких, у побудованій нами інерціальній системі відліку, має координати $\vec{r}_i$ і швидкості $\dot{\vec{r}}_i$ у кожний момент часу t. Її динаміку описують закони Ньютона, які виражають прискорення $\ddot{\vec{r}}_i$ кожної частинки через вектор сили, що діє на неї і її масу m_i. Рівняння руху мають десять інтегралів, які справедливі для всіх явищ природи. Кожен інтеграл дозволяє понизити порядок диференціальних рівнянь на одну одиницю, що полегшує дослідження. Особливу роль серед них відіграє закон збереження енергії, яка є скаляром, що утримує повну інформацію про рівняння руху системи. Він має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(T+U+V\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+\Pi,$$

де $T\triangleq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ і $U\triangleq\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,j\neq i}^{n}U_{ij}$ – кінетична і потенціальна енергії системи, відповідно, $U_{ij}\equiv U\left(\vec{r}_j-\vec{r}_i\right)$ – потенціальна енергія взаємодії i-ої і j-ої частинок, $V\triangleq\sum_{i=1}^{n}U^{\text{ext}}\left(\vec{r}_i,t\right)$ – потенціальна енергія системи у зовнішньому полі, $\Pi\triangleq\frac{\partial A}{\partial t}$ – потужність непотенціальних сил, $\partial A\triangleq\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ij}^{\text{пр,in}}\cdot d\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{пр,ext}}\cdot d\vec{r}_i$ – елемент роботи таких внутрішніх $\vec{F}^{\text{пр,in}}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ і зовнішніх $\vec{F}^{\text{пр,ext}}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ сил. Елемент ∂A не є повним диференціалом, бо має диференціали лише координат, тоді як непотенціальні сили залежать ще й від швидкості та часу.

Механічна система із потенціальною взаємодією частинок у зовнішньому стаціонарному потенціальному полі називається *консервативною* і для неї закон збереження енергії набуває вигляду:

$$T+U+V=E_0=\text{const},$$

де E_0 – повна енергія системи в початковий момент часу t_0 – *інтеграл руху*.

Зауваження 1. Сили. Вони діють або згідно законів природи, або задаються нами як моделі для наближеного опису взаємодії складних систем. У класичній механіці найчастіше досліджують рух частинок і тіл під дією таких сил:

а) Ньютона для всесвітнього тяжіння, яка є мірою фундаментальної взаємодії – гравітації двох частинок з гравітаційними масами m_{g1} і m_{g2}. На другу частинку з боку першої діє сила:

$$\vec{F}_{12}\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=-G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12},$$

де $G=6.674\,08(31)\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравітаційна стала згідно даних CODATA-2014. Таку ж залежність від відстані має й сила Кулона, яка описує фундаментальну, електромагнітну взаємодію двох точкових електричних зарядів величиною q_1 і q_2.

б) Електромагнітного поля на заряд, яка описує фундаментальну електромагнітну дію поля на заряд величиною q. В електричному полі напруженності $\vec{E}\left(t,\vec{r}\right)$ і магнітному полі з індукцією $\vec{B}\left(t,\vec{r}\right)$ на заряд діє сила

$$\vec{F}\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=q\vec{E}\left(t,\vec{r}\right)+q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\left(t,\vec{r}\right).$$

Її джерелом є електромагнітне поле, яке не є механічним об'єктом, тому сила дії частинки на поле не існує.

в) Гука, яку створює пружина розтягнута на величину $\vartriangle x$. Вона діє проти напряму розтягу і пропорційна його величині: $F_H=-k\vartriangle x$, де k – жорсткість пружини. Ця модель часто використовується у задачах дослідження руху поблизу положення стійкої рівноваги.

Зауваження 2. Класифікація сил. Незалежні від часу сили називають *стаціонарними*. Вони описують взаємодію матеріальних точок, бо їх характеристики сталі. *Нестаціонарні* сили виникають при дії на частинку зовнішніх змінних полів.

Серед стаціонарних важливі *потенціальні сили*, бо вони залежать лише від координат і мають вигляд:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right)=-\vec{\nabla}U\left(\vec{r}\right),$$

де $\vec{\nabla}\equiv \mathrm{qrad}$ – градієнт, а $U\left(\vec{r}\right)$ – потенціальна енергія взаємодії частинки з джерелом сили, яке розміщене у початку координат.

Непотенціальні сили взаємодії, зазвичай, залежать від швидкості частинки. Серед них виділяють *дисипативні*, якщо $\vec{F}\parallel\dot{\vec{r}}$, наприклад, в'язке тертя $\vec{F}=-k\dot{\vec{r}}$, та *гіроскопічні*, для яких $\vec{F}\perp\dot{\vec{r}}$, наприклад, сила Лоренца $\vec{F}=q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}(\vec{r})$.

Нестаціонарні сили поділяють аналогічно, але тут найчастіше зустрічаються випадки залежного від часу потенціалу $U\left(t,\vec{r}\right)$, або поля, наприклад $\vec{B}(t,\vec{r})$.

Зауваження 3. Робота і потенціальна енергія. Робота сили $\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$ при переміщенні частинки з точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$ визначається як:

$$A_{21}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\partial A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\left(t,\vec{r}\left(t\right),\dot{\vec{r}}\left(t\right)\right)\cdot d\,\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\left(t,\vec{r}\left(t\right),\dot{\vec{r}}\left(t\right)\right)\cdot\dot{\vec{r}}\left(t\right)dt.$$

Її можна знайти лише коли відома траєкторія частинки $\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t)$. Але для потенціальної сили робота

$$A_{21}^{p}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{\nabla}U\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=-\left(U\left(\vec{r}_2\right)-U\left(\vec{r}_1\right)\right).$$

не залежить від форми траєкторії, а лише від початкової та кінцевої координат. Тому робота потенціальної сили по довільному замкненому контуру дорівнює нулю. Якщо вираз для сили заданий, то вона буде потенціальною за умов:

$$\frac{\partial F_i\left(t,\vec{r}\right)}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j\left(t,\vec{r}\right)}{\partial x_i}=0,\quad \forall i,j.$$

Тоді вираз для потенціальної енергії частинки набуває вигляду:

$$U(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+U(\vec{r}_0),$$

де $\vec{r}_0$ та $U(\vec{r}_0)$ – довільні сталі. Для сил, які спадають із відстанню, зазвичай покладають $\vec{r}_0\to\infty$ і $U(\vec{r}_0)=0$, а для сил, які зростають із відстанню, покладають $\vec{r}_0=0$ і $U(\vec{r}_0)=0$.

Задача 1. З'ясувати які сили є потенціальними у Зауваженні 1**.**

Механіка Лагранжа системи частинок

Рівняння і функція Лагранжа. Якщо координати системи n частинок обмежені s зв'язками $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n, t) = 0$, де $\alpha = 1, 2, \dots s < 3n$, тоді можна перейти до *узагальнених координат* $q_1, q_2, \dots, q_f$, де $f = 3n - s > 0$ – кількість ступенів вільності системи, за допомогою перетворень $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$. Узагальнені координати варто вибирати так, щоб всі s зв'язків задовольнялися тотожно. Як правило, це переходи до криволінійних координат, до неінерціальної системи відліку і т.п.

В узагальнених координатах рівняння руху класичної механіки набувають універсального вигляду, який називають *рівняннями Лагранжа II-го роду*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \Phi_k^{\text{пр}}, \quad k = 1, 2, \dots, f, \tag{1}$$

де *функція Лагранжа* механічної системи розраховується як

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t), \tag{2}$$

тут $\dot{q}$ – узагальнені швидкості, кінетична енергії в узагальнених координатах стає сумою трьох доданків:

$$T(q, \dot{q}, t) = T_2(q, \dot{q}, t) + T_1(q, \dot{q}, t) + T_0(q, t), \tag{3}$$

у яких індекс показує степінь швидкості, $U(q,t) = U(\vec{r}(q,t))$ – потенціальна енергія системи, а $\Phi_k^{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{\text{пр}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$ – узагальнена непотенціальна сила.

Якщо в системі діють лише потенціальні сили, то рівняння Лагранжа II-го роду стають однорідними:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, f \tag{4}$$

і утворюють систему з f явних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно узагальнених координат.

Приклад 1. Побудувати функцію Лагранжа і рівняння Лагранжа II-го роду для вільної частинки у сферичних координатах.

Переходимо від декартових до сферичних координат r, θ, φ, які у цій задачі є узагальненими. Тоді координати і швидкості частинки набувають вигляду:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta \text{ та}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta.$$

Після підстановки у (2) та елементарних обчислень отримуємо:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right),$$

де m – маса частинки. Тепер рівняння Лагранжа II-го роду для узагальнених координат набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt}(\dot r)-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\dot\theta r^2\right)-r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\, r^2\sin^2\theta\right)=0.$$

Звідси видно, що вираз під диференціалом у рівнянні для φ є інтегралом руху. З нього можна виразити $\dot\varphi$ через r і θ. Ці рівняння описують рух вільної матеріальної точки, тому їх розв’язок задає пряму в сферичних координатах.

Інваріантність рівнянь Лагранжа. Є відносно: а) точкових перетворень старих узагальнених координат q на нові Q, тобто $q\Rightarrow q(Q,t)$; б) додавання до функції Лагранжа повної похідної по часу від довільної функції узагальнених координат і часу $G(q,t)$, тобто $\mathcal{L}\Rightarrow\mathcal{L}'\triangleq\mathcal{L}+\frac{d}{dt}G(q(t),t)$.

Заряд в електромагнітному полі. Сила дії магнітного поля на заряд q непотенціальна, але є повною похідною по часу від функції координат і часу. Тому для заряду q в електромагнітному полі функція Лагранжа має вигляд:

$$\mathcal{L}=T-U-q\varphi(\vec r,t)+q\dot{\vec r}\cdot\vec A(\vec r,t),\tag{5}$$

де φ і $\vec A$ – скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля. Якщо поле стале, то $\varphi=\vec E\cdot\vec r$ і $\vec A=\frac{1}{2}\left[\vec B,\vec r\right]$. Вирази для напруженості електричного та індукції магнітного полів наступні: $\vec E=-\operatorname{grad}\varphi-\vec A_t'$, і $\vec B=\operatorname{rot}\vec A$. Два доданки у (5) в рамках механіки Лагранжа описують взаємодію заряду та його струму з електричним і магнітним полями, відповідно[1].

Приклад 2. Побудувати функцію Лагранжа для сферичного маятника в електричному полі напруженістю $\vec E=\vec kE_0$. Діємо як у Прикладі 1, взявши до уваги, що радіус сфери сталий і рівний l, прискорення вільного падіння g направлене проти осі Oz, а маса частинки рівна m. Після підстановки у (5) та елементарних обчислень отримуємо:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)-\left(mgl-qE_0\right)\cos\theta\,.$$

Звідси видно, що координата φ не входить у функцію Лагранжа. Відмітимо, що при певній напруженості електричного поля можна компенсувати силу тяжіння.

Приклад 3. Побудувати функцію Лагранжа для сферичного маятника в магнітному полі індукцією $\vec B=\vec kB_0$. Діємо, як у Прикладі 2. У декартових координатах шукаємо векторний потенціал та доданок $q\dot{\vec r}\cdot\vec A=qB_0\left(\dot xy-\dot yx\right)/2$. Потім переходимо до сферичних координат і після елементарних обчислень отримуємо $q\dot{\vec r}\cdot\vec A=\left(qB_0l^2\,\dot\varphi/2\right)\sin^2\theta$. Підстановка в (5) дає

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)-mgl\cos\theta+\left(qB_0l^2\,\dot\varphi/2\right)\sin^2\theta\,,$$

звідки видно, що і в цьому випадку координата φ також не входить у функцію Лагранжа.

Спряжені імпульси. У механіці Лагранжа вводяться узагальнені імпульси:

[1] У релятивістській механіці це функція Лагранжа, що описує взаємодію частинок і поля $\mathcal{L}_{\text{inter}}=c^{-1}j^\mu A_\mu$, де c – швидкість світла, $j^\mu=\left(cq,\dot{\vec r}q\right)$ та $A_\mu=\left(\varphi,-c\vec A\right)$ – контра- і коваріантні 4-струм частинки та 4-потенціал поля.

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}(t,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = p_k(t,q,\dot{q}), \quad k = 1,2,\dots,f\,, \tag{6}$$

які, відповідно до (3), є лінійною комбінацією узагальнених швидкостей[2]. З їх допомогою рівняння Лагранжа ІІ-го роду можна записати як закон збереження імпульсу

$$\frac{d}{dt}p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \Phi_k^{\text{пр}}, \quad k = 1,2,\dots,f\,.$$

Циклічні координати. Координата називається *циклічною*, якщо функція Лагранжа не залежить від неї, на противагу її швидкості. Вона може з'явитися, якщо ввести узагальнені координати, які задовольняють рівняння зв'язків і враховують симетрію задачі. Для циклічної координати q_c справедливо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(t,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_c} \equiv \frac{d}{dt}p_c(t,q,\dot{q}) = 0\,, \tag{7}$$

де p_c – *узагальнений імпульс,* спряжений координаті q_c. Він є інтегралом руху, тому $p_c(t,q,\dot{q}) = p_{c,0} = \text{const}$. Якщо звідси виразити $\dot{q}_c$ через $p_{c,0}$ та нециклічні координати, то її інтегрування дає ще один інтеграл руху $q_{c,0}$.

Тому циклічна координата дозволяє понизити порядок рівнянь Лагранжа ІІ-го роду на дві одиниці.

Приклад 4. Знайти циклічні координати, побудувати спряжені їм імпульси та записати квадратури для циклічних координат для систем із Прикладів 1 – 3.

В усіх прикладах циклічною є координата φ, тому отримуємо:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \mathrm{C}_1, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \mathrm{C}_1, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = l^2\left(m\dot{\varphi} + qB_0/2\right)\sin^2\theta = \mathrm{C}_1.$$

Усі отримані вирази для узагальнених імпульсів мають розмірність моменту імпульсу. Тепер із кожного з цих рівнянь виражаємо $\dot{\varphi}$ і будуємо квадратуру. В результаті отримуємо:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \quad \text{і} \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{p_\varphi}{mr^2(\tau)\sin^2\theta(\tau)}d\tau,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} \quad \text{і} \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta(\tau)}d\tau,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} - \frac{q}{2m}B_0 \quad \text{і} \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta(\tau)}d\tau - \frac{q}{2m}B_0 t.$$

Тут φ_0 – друга стала інтегрування для циклічної координати, окрім p_φ. Для обчислення інтегралів залежності $r(t)$ і $\theta(t)$ потрібно знайти із відповідних рівнянь Лагранжа, у які $\dot{\varphi}$ потрібно підставити з першого стовпчика наведених формул.

Інтеграл енергії. Якщо функція Лагранжа не залежить явно від часу, то тоді існує інтеграл енергії – своєрідний спряжений до часу імпульс:

[2] Розмірність узагальненого імпульсу спряженого координаті q визначається розмірністю похідної $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ як добуток енергії і часу (це розмірність дії), ділений на розмірність q.

$$\mathcal{E}=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k p_k-\mathcal{L}\,. \tag{8}$$

Він дозволяє понизити порядок системи рівнянь Лагранжа ще на одиницю.

Аналіз системи на інтегрованість у квадратурах. Для механічної системи з f ступенями вільності рівняння Лагранжа II-го роду мають сумарний порядок рівний $2f$. Але, якщо функція Лагранжа має n_c циклічних змінних і явно не залежить від часу, то тоді ефективний порядок системи рівнянь буде

$$n_{ef}=2\left(f-n_c\right)-1. \tag{9}$$

Оскільки явне диференціальне рівняння 1-го порядку інтегрується у квадратурах, то звідси випливає, що розв'язки рівнянь руху для системи із $n_{ef}=1$ можна записати у вигляді квадратур. Якщо ж $n_{ef}>1$, то всі квадратури ніяк знайти, і рух системи потрібно досліджувати або наближеними, або чисельними методами.

Приклад 5. Проаналізувати на предмет інтегрованості у квадратурах рівнянь Лагранжа II-го роду системи з Прикладів 1 – 3.

У Прикладі 1: $\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$, тому тут 3 степені вільності, причому φ циклічна, а $\mathcal{L}$ не залежить від часу. Тому (9) дає $n_{ef}=3$ і задача не інтегрована у квадратурах у цих координатах. У Прикладі 2 функція Лагранжа $\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-\left(mgl-qE_0\right)\cos\theta$ має 2 степені вільності, одну циклічну координату і стаціонарна. Тому $n_{ef}=1$ і задача інтегрована у квадратурах. У Прикладі 3 функція Лагранжа $\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-mgl\cos\theta+\left(qB_0l^2\,\dot{\varphi}/2\right)\sin^2\theta$ і ситуація аналогічна Прикладу 2.

Ця властивість функції та рівнянь Лагранжа II-го роду дозволяє швидко відповісти на питання про можливість дослідження руху системи аналітичними методами, що вигідно відрізняє їх від механіки Ньютона.

Механіка абсолютно твердого тіла.

Кінематика. *Абсолютно тверде тіло* (атт) – це система частинок, відстані між якими сталі. Воно виступає як єдине ціле під час руху. Його ступені вільності параметризуються наступним чином:

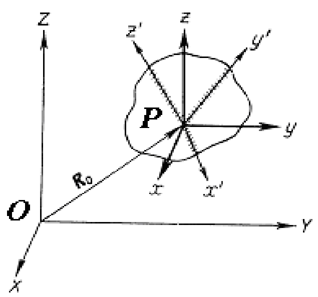


Рис. 1. Системи координат атт.

1. Вибирається довільна точка P, яка не обов'язково належить атт, але не змінює своє положення відносно його частинок. Вона називається полюсом атт у лабораторній, інерціальній системі відліку $OXYZ$ (Рис. 1) – так звана L-система. Координати полюса атт X_P, Y_P, Z_P описують його положення як цілого в L-системі, їх похідні по часу – його швидкість як цілого і т.п.

2. У полюсі P будуються дві системи координат: перша має осі Px, Py, Pz, паралельні відповідним осям L-системи, а друга – осі Px', Py', Pz', нерозривно зв'язані з частинками атт, які обертаються разом із ним навколо полюса – так звана P-

система. Розклад ортів P-системи по ортах L-системи задається матрицею поворотів α_{ij}, яка пов'язує їх базисні декартові вектор-стовчики[3]:

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ik}\vec{e}_k, \quad i = 1,2,3.$$

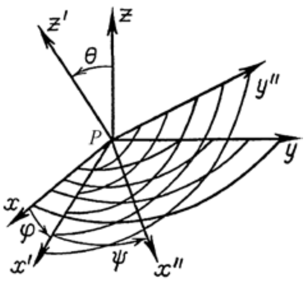


Рис. 2. Ейлерові кути орієнтації.

3) Елементи матриці α_{ij} задовольняють шість умов $\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ki}\alpha_{ni} = \delta_{kn}$, де δ_{kn} – символ Кронекера, а $k \geq n = 1,2,3$. Тому орієнтацію атт можна задати трьома незалежними параметрами[4]. Найчастіше використовують кути лівих поворотів Ейлера[5] – Рис. 2: навколо осі Pz на кут прецесії $\varphi \in [0, 2\pi]$, навколо осі Px' на кут нутації $\theta \in [0, \pi]$, та навколо осі Pz' на кут власного обертання $\psi \in [0, 2\pi]$. Тоді матриця поворотів Ейлера набуває вигляду:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Координати полюса $\vec{R}_P$ та кути Ейлера θ, φ, ψ задають положення атт і його орієнтацію. Відмітимо, що при $\theta = 0, \pi$ матриця $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\varphi \pm \psi)$ залежить від одного параметра, а не від двох і задає орієнтацію атт неоднозначно.

Полюс атт має швидкість $\dot{\vec{R}}_P$, задану в L-системі. Швидкість обертального руху задає *вектор кутової швидкості* $\vec{\omega}$, який можна знайти з формули Пуансо:

$$\frac{d\vec{e}_i'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_i'], \quad i = 1,2,3,$$

якщо підставити вирази для рухомих ортів через нерухомі $\vec{e}_i' = \alpha_{ik}\vec{e}_k$, обчислити похідні від матриці поворотів і провести спрощення. Отримаємо кінематичні рівняння Ейлера для вектора кутової швидкості ω_i в P-системі та Ω_i в L-системі:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \\ \omega_y = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega_x = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi, \\ \Omega_y = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi, \\ \Omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{cases}$$

Вони нелінійні відносно кутів, а $\vec{\omega}$ і $\vec{\Omega}$ неможливо представити у вигляді похідної по часу від якогось вектора, тому „вектор повороту” не існує.

Зауваження 4. Кутова швидкість циліндра при коченні по площині. Сумістимо вісь власного обертання $O'z'$ системи S' з віссю циліндра. Вона не змінює свій напрям, а лише

[3] Іноді задають розклад нерухомих ортів по рухомих. Тоді матриця поворотів обернена до щойно означеної.

[4] Застосовують також і 4 параметри орієнтації з одним зв’язком. Це параметри Кейлі-Клейна, Родріга-Гамільтона та кватерніони.

[5] Послідовність поворотів Ейлера є однією із 12-и можливих і позначається як zxz. У навігації застосовують послідовність zyx з кутами Крилова: рискання, тангаж і крен.

переміщується паралельно сама собі. Тоді $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, а $\vec{\omega} = \omega_3 \vec{e}_3' = \dot{\psi} \vec{e}_3'$. Вісь Oz L-системи направимо перпендикулярно площині, вісь Ox – вздовж руху циліндра, вісь Oy – паралельно до $O'z'$. Тоді $\vec{\Omega} = \Omega_2 \vec{e}_2 = -\dot{\psi} \vec{e}_2$. Це найпростіший обертальний рух атт, при якому кутова швидкість виражається лише через один кут повороту.

Динаміка. Динамічні властивості атт задаються його масою m і тензором моменту інерції I_{ij}. Якщо полюс атт помістити у його центрі мас – так звана С-система, то компоненти симетричного, невід'ємно означеного тензора моменту інерції визначаються за формулою:

$$I_{ij} \triangleq \iiint\limits_V \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \rho(r) dV,$$

а при зсуві полюса з центру мас на сталий вектор $\vec{a}$, вони змінюються згідно *теореми Штейнера* $I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M\left(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta \right)$.

Зауваження 5. Головна система атт. Існує ортогональна декартова система координат з початком у центрі мас атт, у якій він набуває діагонального вигляду:

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

де I_1, I_2, I_3 – головні моменти інерції. Це головна система атт, або G-система.

Кінетична енергія. При довільному виборі полюса та напрямів осей P-системи вираз для кінетичної енергії має вигляд:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_P^2 + M \dot{\vec{R}}_P \cdot \left[\vec{\omega}, \vec{r}_c' \right] + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j,$$

де $\vec{r}_c'$ – координати центру мас атт в P-системі. Тут перший доданок – кінетична енергія поступального, останній – обертального руху, а другий – перехресний доданок, у який входять величини задані в L- і P- системах. Він громіздкий, оскільки в ньому будуть вирази $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_n$, які задаються елементами матриці α_{kn}. Але якщо полюс помістити в центрі мас атт і перейти в його G-систему, то кінетична енергія матиме внески поступального і обертального рухів:

$$T = T_t + T_r = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_P^2 + \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right).$$

Якщо ж атт має нерухому точку і в неї помістити полюс і перейти в його G-систему, то кінетична енергія матиме лише внесок обертального руху:

$$T = T_r = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right).$$

Умови контакту. Якщо одне атт дотикається до іншого в деякій точці $\vec{r}_t$, заданій у P-системі 1-го атт, то умови в точці їх контакту необхідні для розв'язку рівнянь руху. Якщо контакт забезпечує так зване *ідеальне кочення*, то їх швидкості будуть однаковими в точці контакту:

$$\dot{\vec{R}}_{P,1} + \left[\vec{\omega}_1, \vec{r}_{t,1} \right] = \dot{\vec{R}}_{P,2} + \left[\vec{\omega}_2, \vec{r}_{t,2} \right],$$

де індекси 1,2 позначають обидва атт, а $\vec{\omega}_k$ і $\vec{r}_{t,k}$ задаються в G-системах цих атт.

Зауваження 6. Швидкість циліндра при ідеальному коченні по площині. Для систем координат S і S' із Зауваження 4 $\vec{k}' = -\vec{j}$. Нерухома площина і рухомий циліндр дотикаються вздовж відрізка паралельного осі Oy, тому на площині $\dot{\vec{r}}_{B_1}(t) = 0$. Точка контакту на циліндрі $\vec{r}_{B_2} = \vec{i}\, X + \vec{k}\, a + \vec{e}'_C(t)\, a$, де a – його радіус, а рухомий орт $\vec{e}'_C(t) \| \vec{k}$ і його початок зміщується при русі циліндра. Після диференціювання отримуємо:

$$0 = \vec{i}\, \dot{X} + \left[\vec{\omega}', \vec{e}'_C(t)\right] a = \vec{i}\, \dot{X} + \left[\dot{\psi}\vec{k}', \vec{e}'_C(t)\right] a = \vec{i}\, \dot{X} + \left[\vec{j}, \vec{k}\right] \dot{\psi} a = \vec{i}\left(\dot{X} + \dot{\psi} a\right),$$

де враховано, що $\vec{k}' = -\vec{j}$ і $\vec{e}'_C = -\vec{k}$. Звідси отримуємо $\dot{X} = -\dot{\psi} a$. Можна також показати, що умова ідеального кочення двох циліндрів із нерухомими осями має вигляд: $\dot{\psi}_1 a_1 = -\dot{\psi}_2 a_2$.

Функція Лагранжа і рівняння Лагранжа ІІ-го роду. Кожне атт може мати не більше шести узагальнених координат і швидкостей у функції Лагранжа і відповідні їм рівняння Лагранжа ІІ-го роду. Тому аналіз функції Лагранжа на предмет інтегрованості задачі у квадратурах важливий для досліджень. На жаль, для таких систем клас інтегрованих у квадратурах задач досить бідний.

Приклад 6. Побудувати функцію Лагранжа для дзиґи з нерухомою точкою опори у магнітному полі індукцією $\vec{B} = \vec{k} B_0$, якщо вона має масу m, тензор моменту інерції I, I, I_3, заряд q у центрі мас, а відстань від точки опори до центру мас дорівнює l. Проаналізувати її на предмет інтегрованості у квадратурах.

Поміщуємо полюс у точку опори, тому тензор моменту інерції матиме вигляд $I + ml^2, I + ml^2, I_3$. Тоді кінетична енергія:

$$T = \frac{1}{2}\left(I + ml^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\psi + \varphi\cos\theta\right)^2 .$$

У декартових координатах шукаємо векторний потенціал та доданок $q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = qB_0\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right)/2$. Потім переходимо до сферичних координат і після елементарних обчислень отримуємо $q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = \left(qB_0 l^2\, \dot{\varphi}/2\right)\sin^2\theta$. Тому функція Лагранжа набуває вигляду:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(I + ml^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2} qB_0 l^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta - mgl\cos\theta .$$

Функція Лагранжа має 3 ступені вільності, циклічні координати φ та ψ і стаціонарна. Тому $n_{ef} = 1$ і задача інтегрована у квадратурах.

Приклад 7. Побудувати функцію Лагранжа для дзиґи, точка опори якої може рухатися по площині. Дзиґа має масу m, тензор моменту інерції I, I, I_3, відстань від точки опори до центру мас дорівнює l. Проаналізувати її на предмет інтегрованості у квадратурах.

Поміщуємо полюс у центр мас, тому:

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{1}{2} I\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\psi + \varphi\cos\theta\right)^2 .$$

Враховуємо, що $Z = l\cos\theta$ і після обчислень отримуємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta .$$

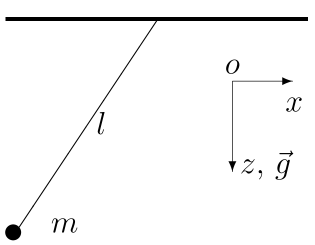
Вона має 5 степенів вільності, циклічні координати X, Y, φ та ψ і стаціонарна. Тому $n_{ef} = 1$ і задача інтегрована у квадратурах.

Функція Лагранжа дає відповідь на питання про інтегрованість рівнянь руху в квадратурах і це є її перевага над механікою Ньютона-Ейлера.

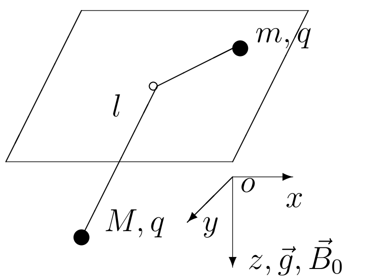
Завдання № **1**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

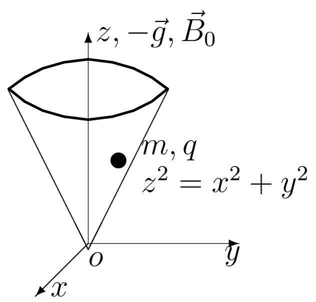
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



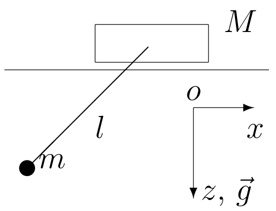
1.



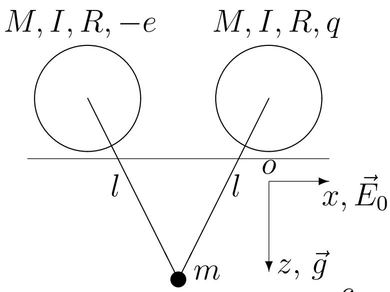
2.



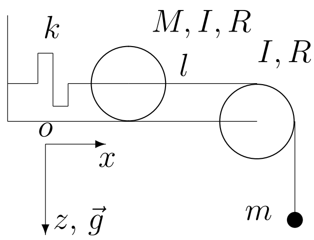
3.



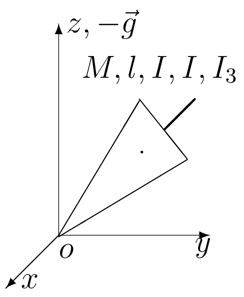
4.



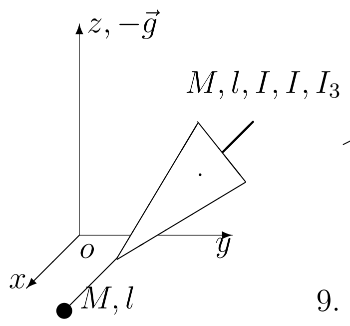
5.



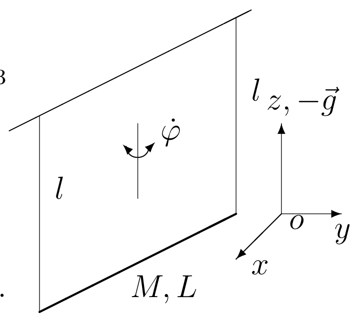
6.



7.



8.

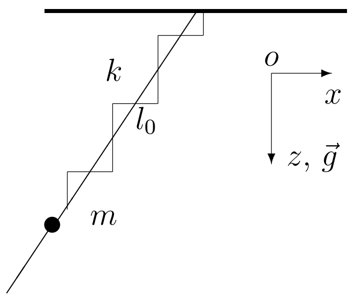


9.

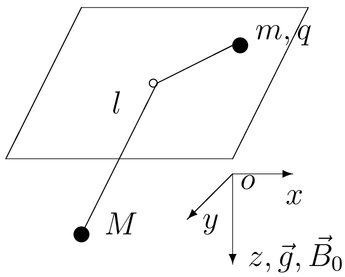
Завдання № **2**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

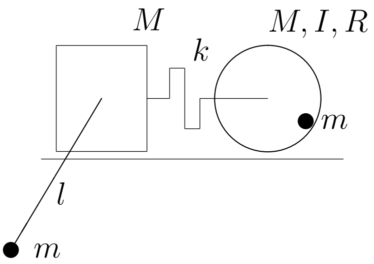
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



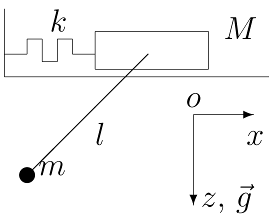
1.



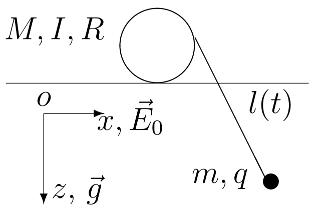
2.



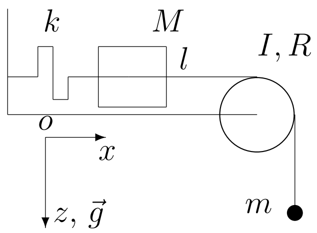
3.



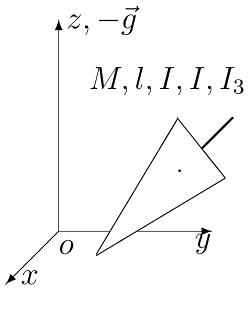
4.



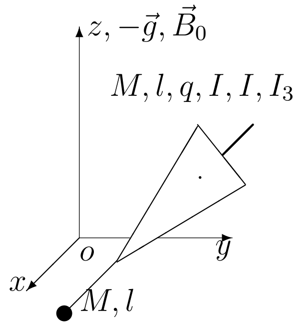
5.



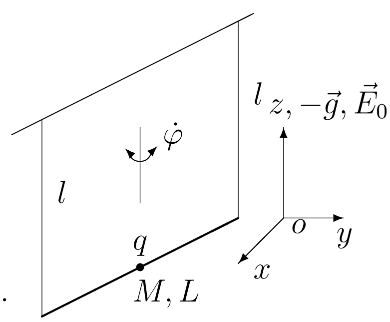
6.



7.



8.

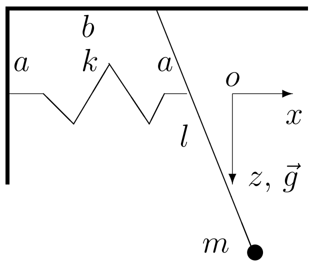


9.

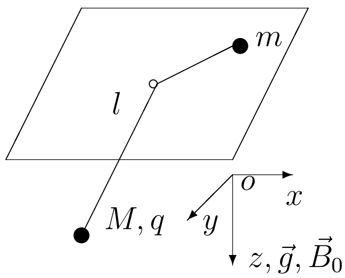
Завдання № **3**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

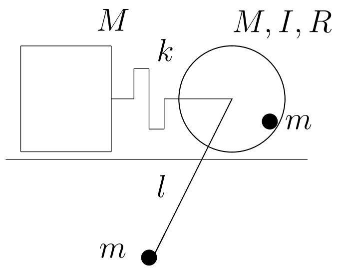
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



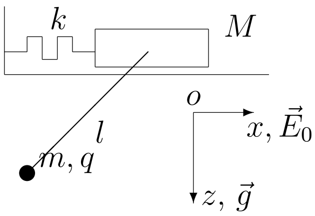
1.



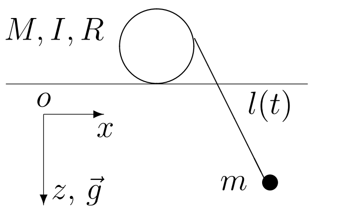
2.



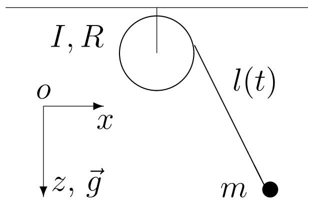
3.



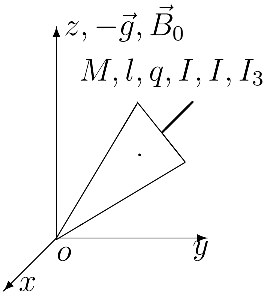
4.



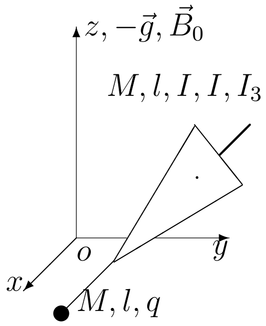
5.



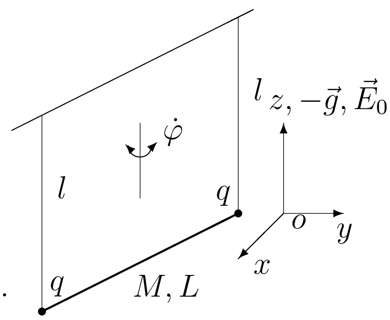
6.



7.



8.

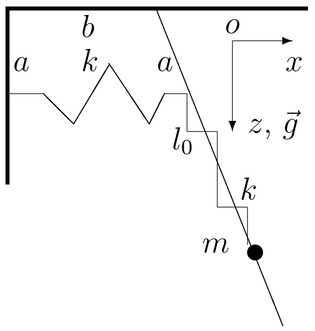


9.

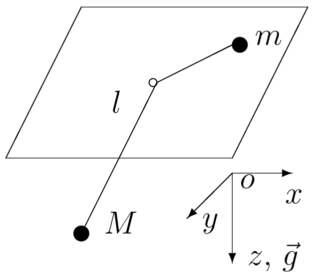
Завдання № **4**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

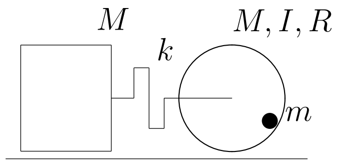
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



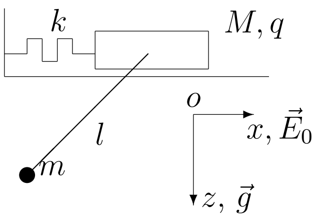
1.



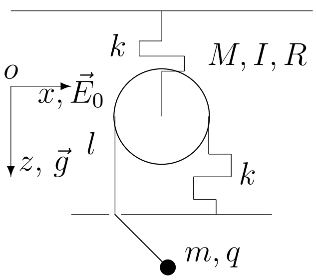
2.



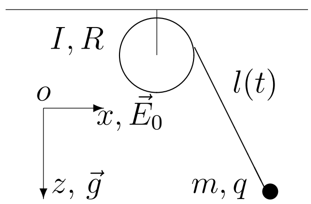
3.



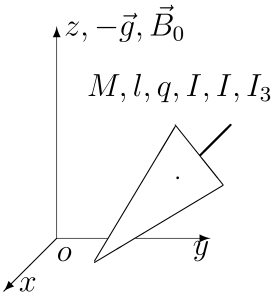
4.



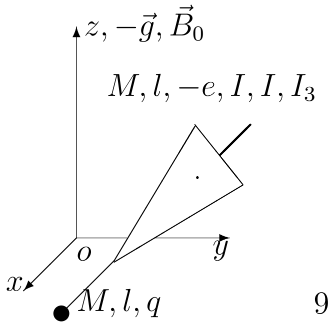
5.



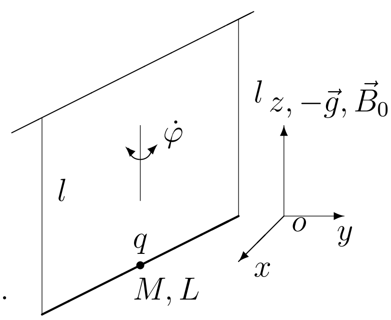
6.



7.



8.

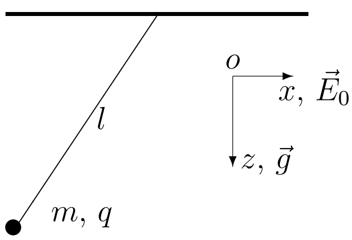


9.

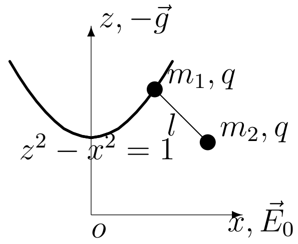
Завдання № **5**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

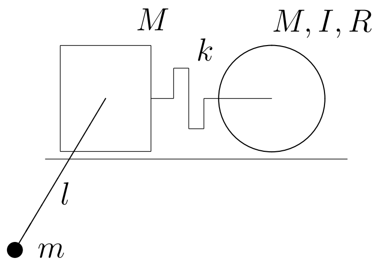
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



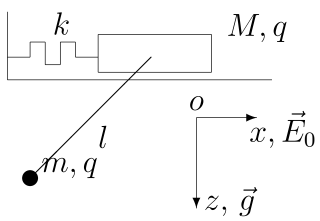
1.



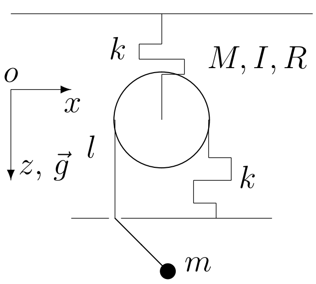
2.



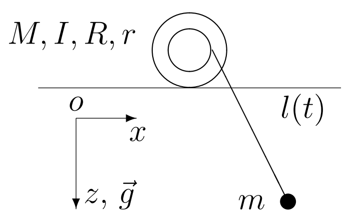
3.



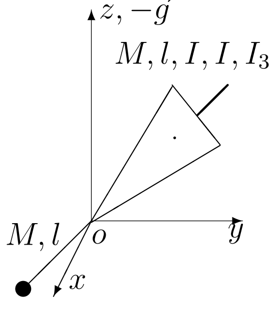
4.



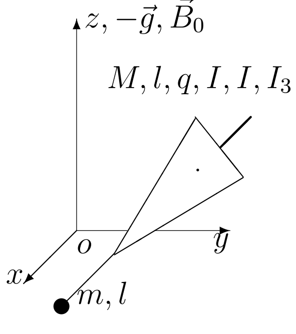
5.



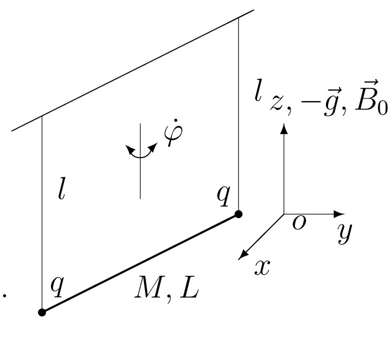
6.



7.



8.

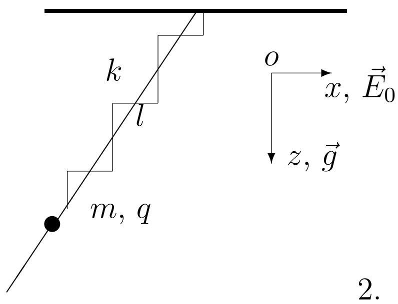


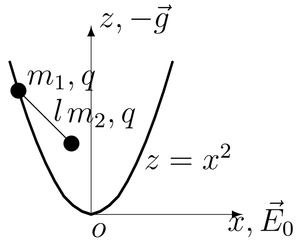
9.

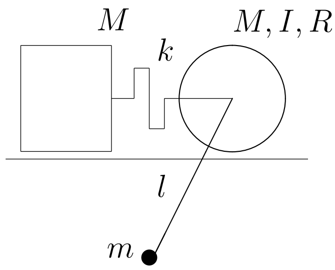
Завдання № **6**

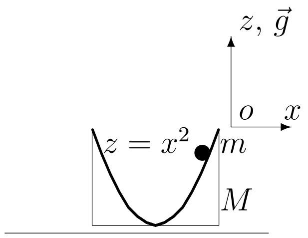
Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

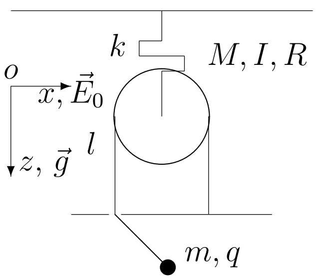
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.

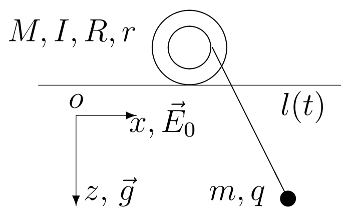
1. 

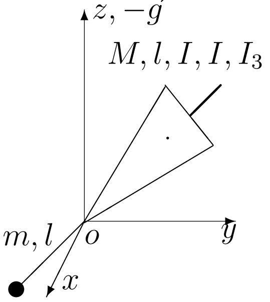
2. 

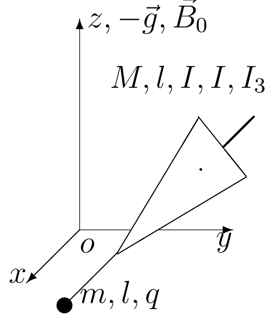
3. 

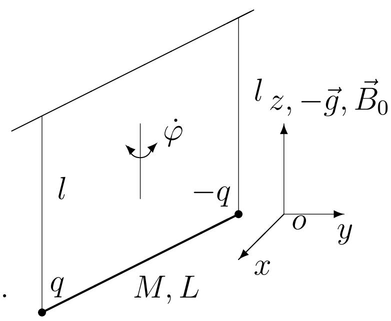
4. 

5. 

6. 

7. 

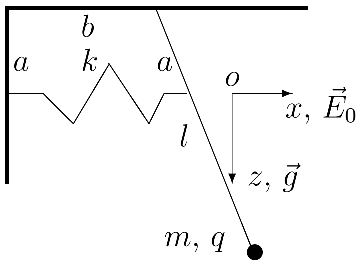
8. 

9. 

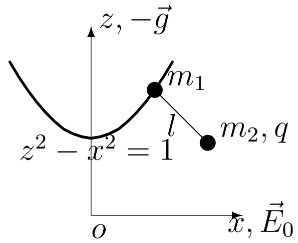
Завдання № **7**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

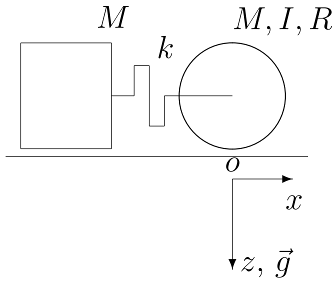
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



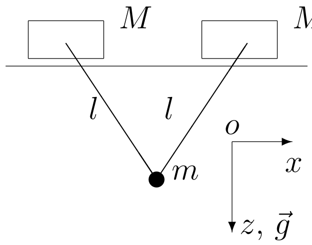
1.



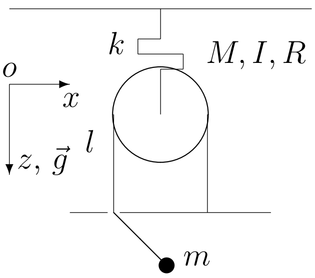
2.



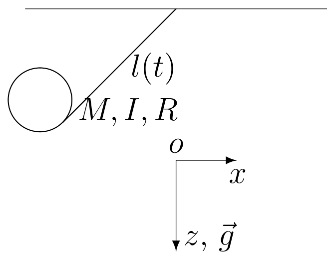
3.



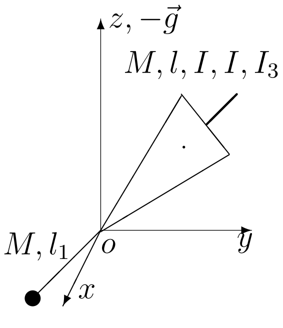
4.



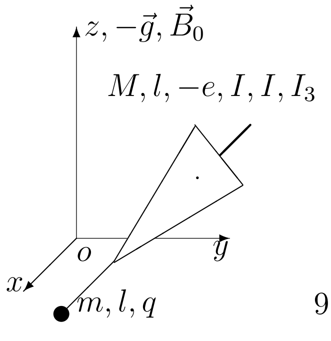
5.



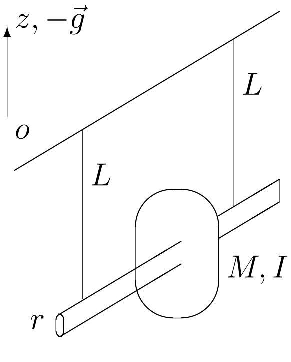
6.



7.



8.

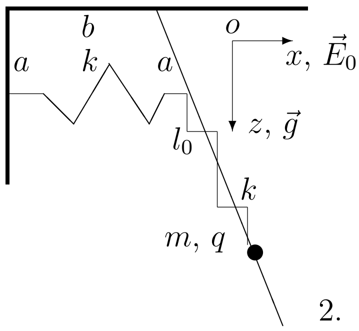


9.

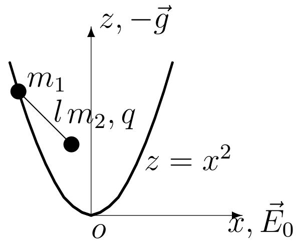
Завдання № **8**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

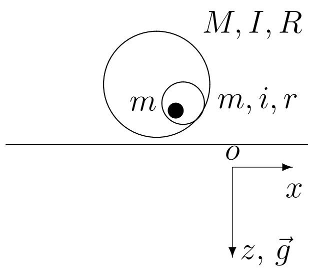
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



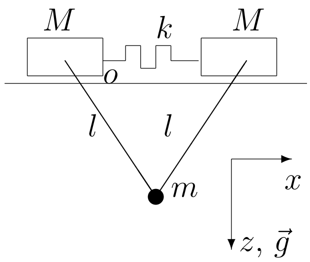
1.



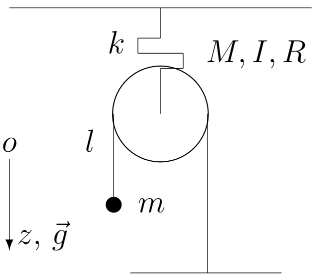
2.



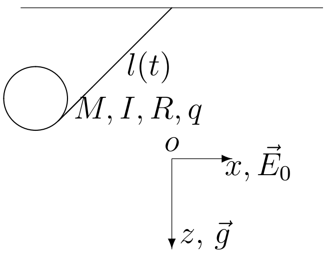
3.



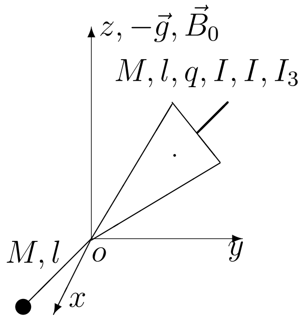
4.



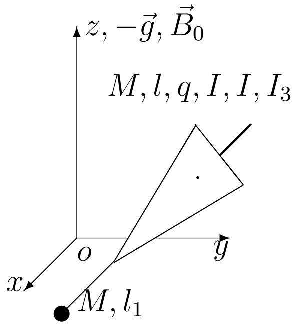
5.



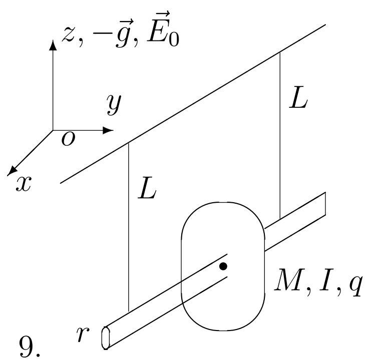
6.



7.



8.

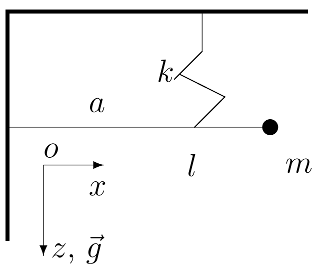


9.

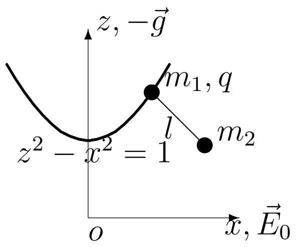
Завдання № **9**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

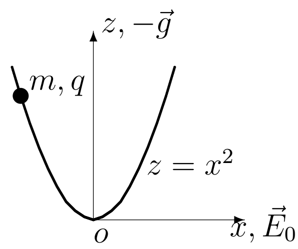
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



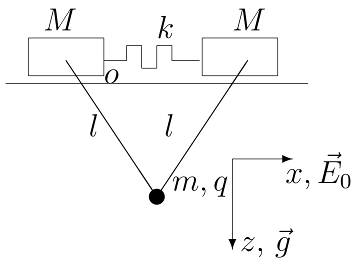
1.



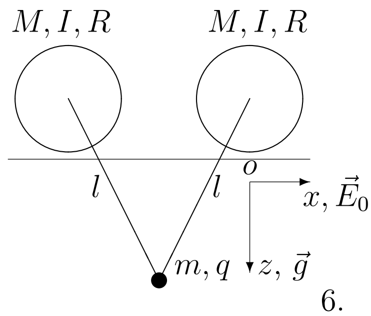
2.



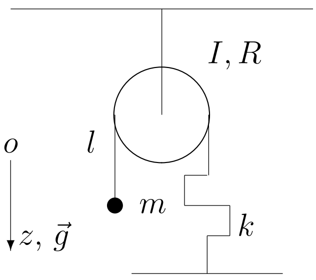
3.



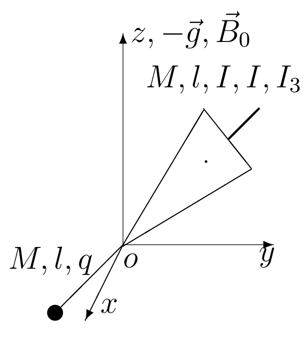
4.



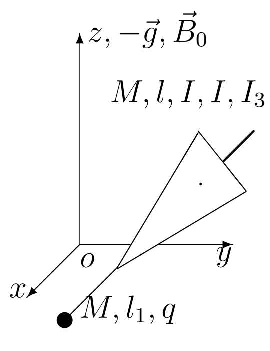
5.



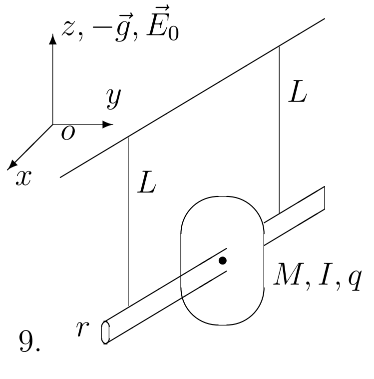
6.



7.



8.

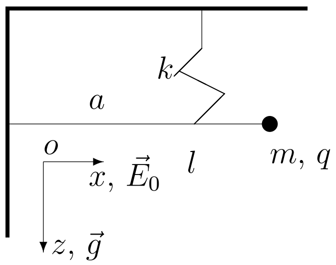


9.

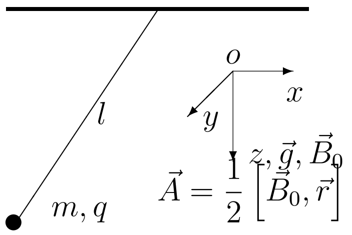
Завдання № **10**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

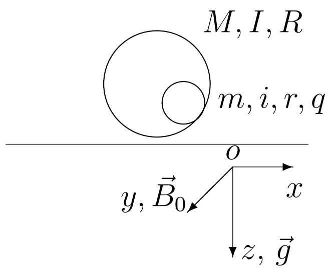
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



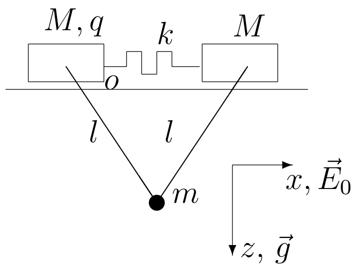
1.



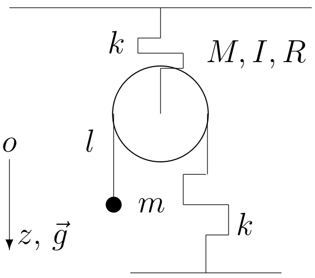
2.



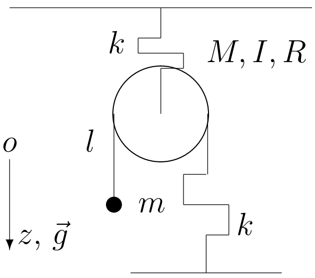
3.



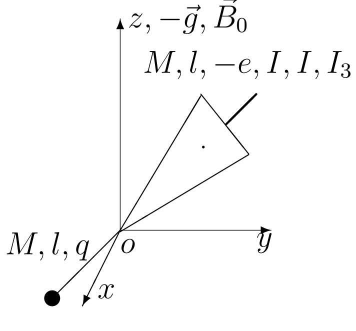
4.



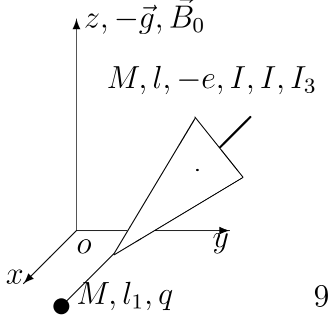
5.



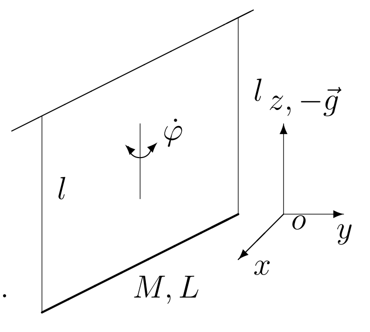
6.



7.



8.

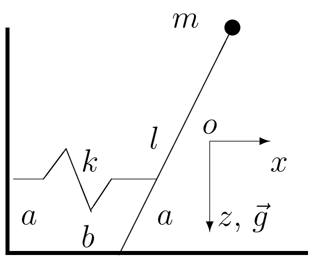


9.

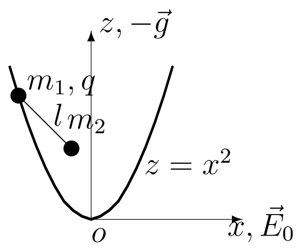
Завдання № **11**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

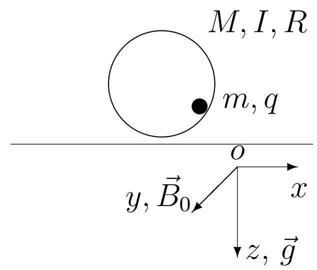
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



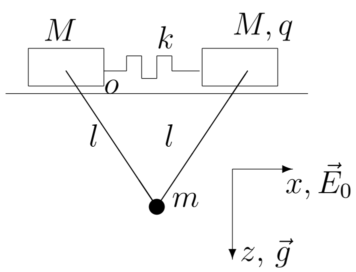
1.



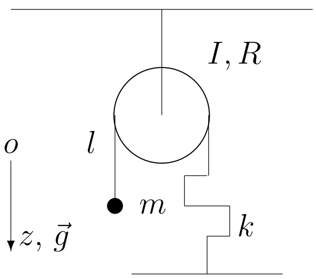
2.



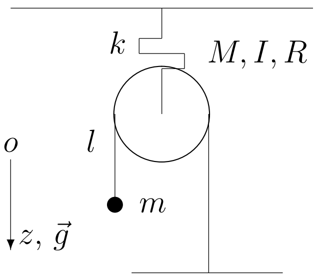
3.



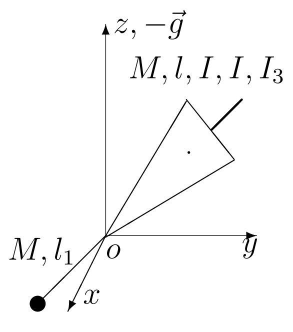
4.



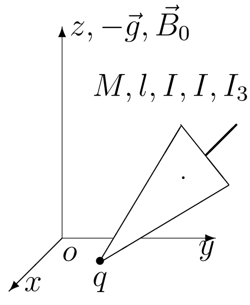
5.



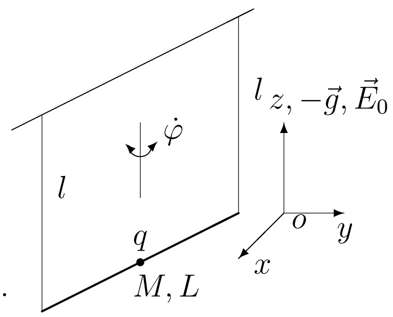
6.



7.



8.

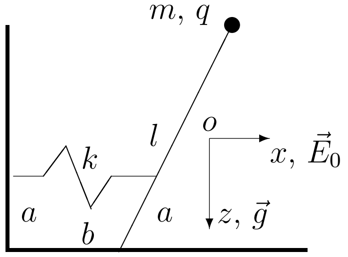


9.

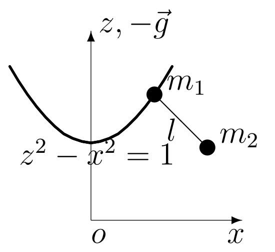
Завдання № **12**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

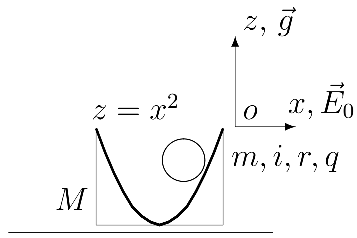
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



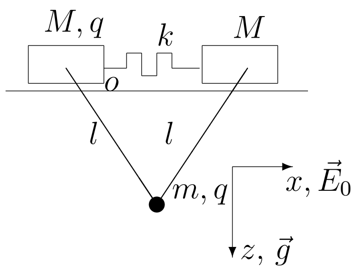
1.



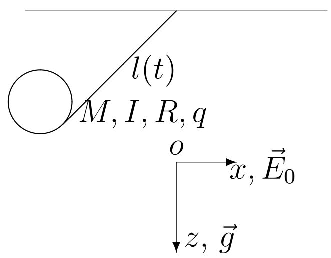
2.



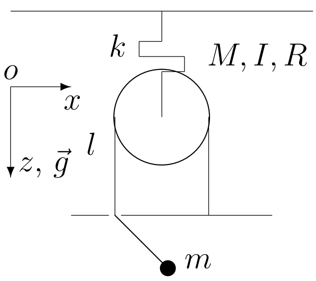
3.



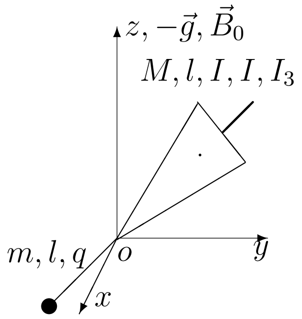
4.



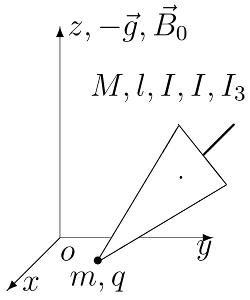
5.



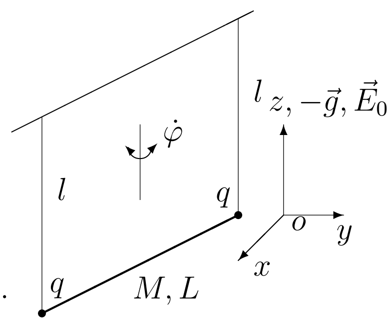
6.



7.



8.

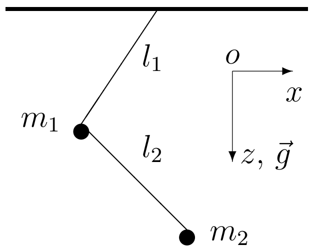


9.

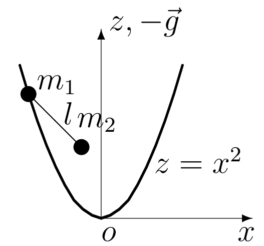
Завдання № **13**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

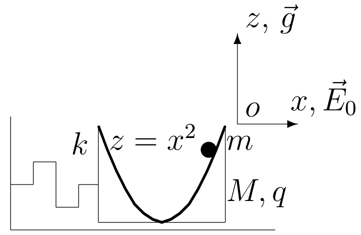
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



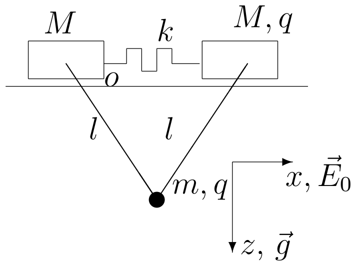
1.



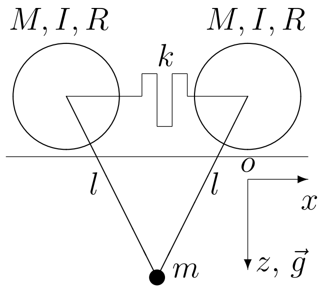
2.



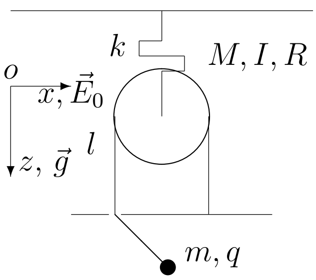
3.



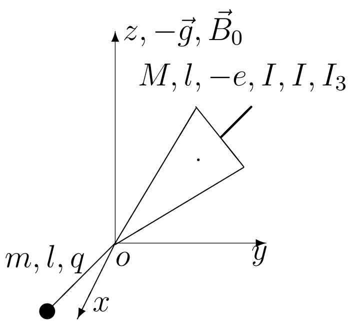
4.



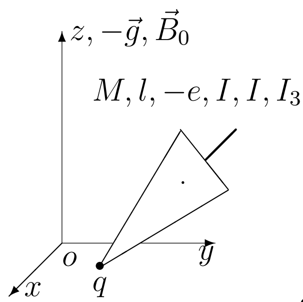
5.



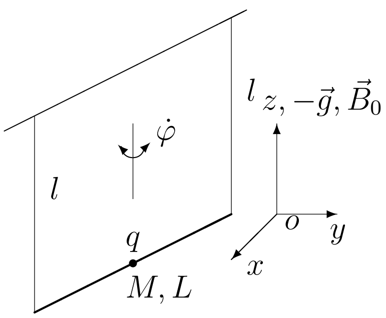
6.



7.



8.

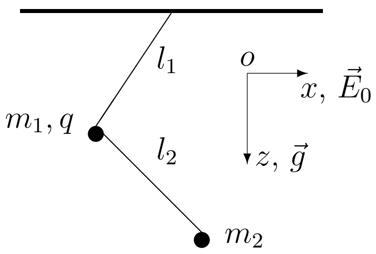


9.

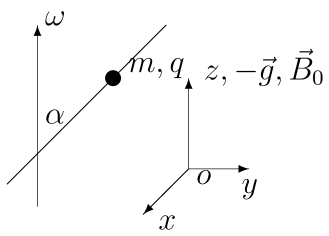
Завдання № **14**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

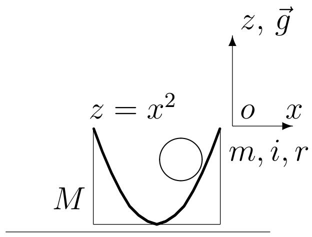
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



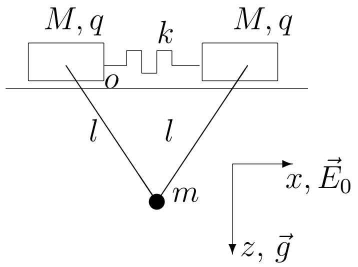
1.



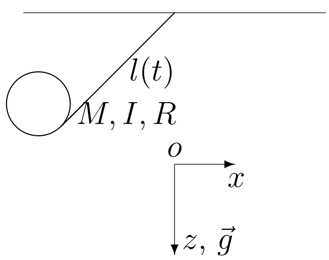
2.



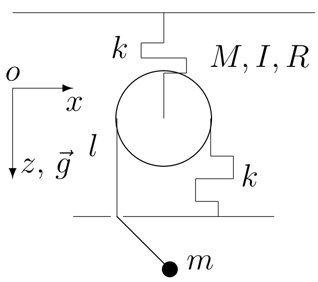
3.



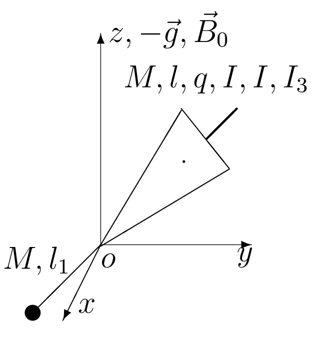
4.



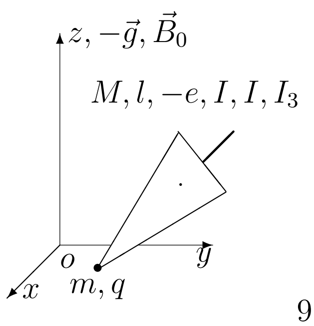
5.



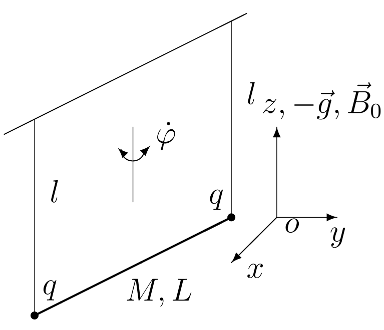
6.



7.



8.

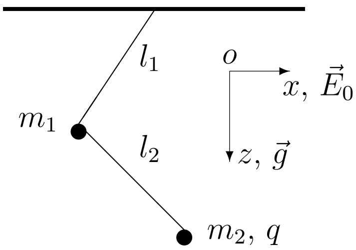


9.

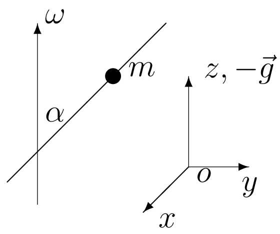
Завдання № **15**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

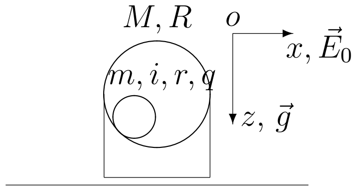
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



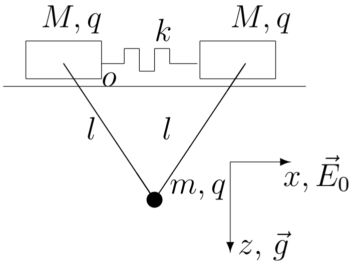
1.



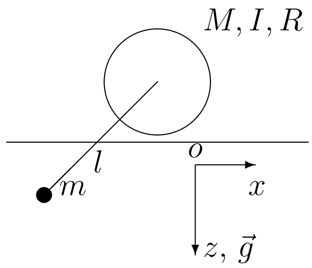
2.



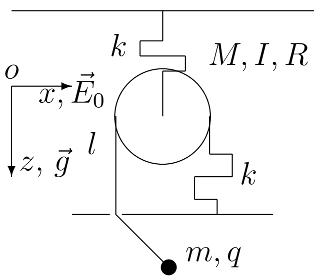
3.



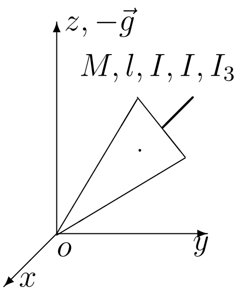
4.



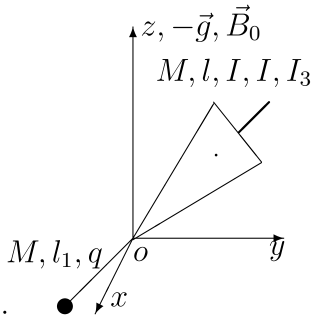
5.



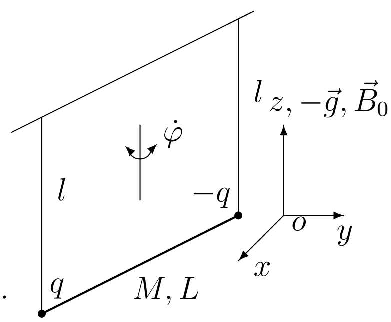
6.



7.



8.

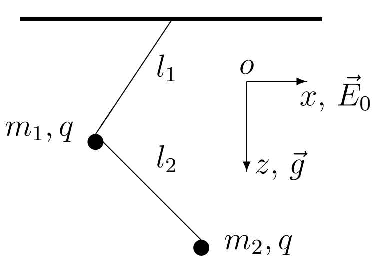


9.

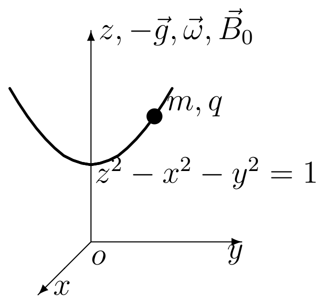
Завдання № **16**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

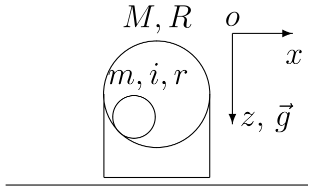
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



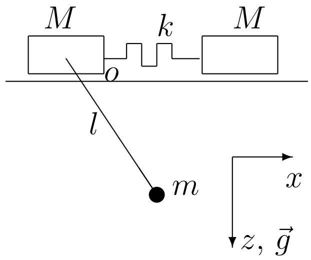
1.



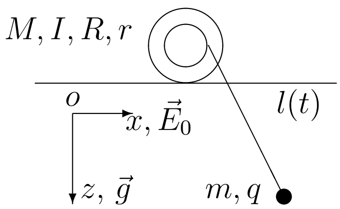
2.



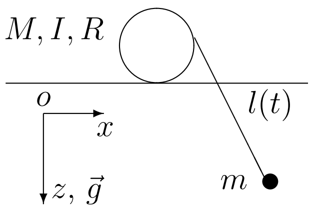
3.



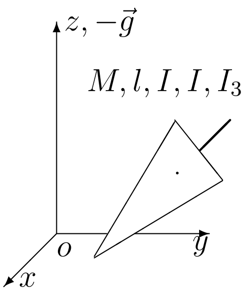
4.



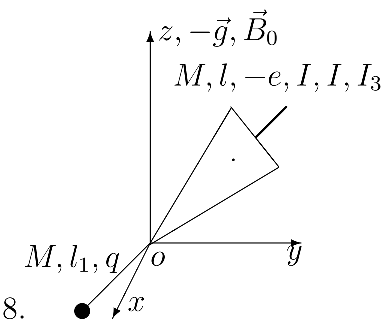
5.



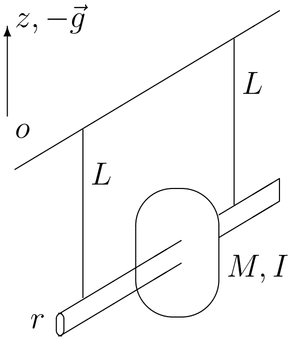
6.



7.



8.

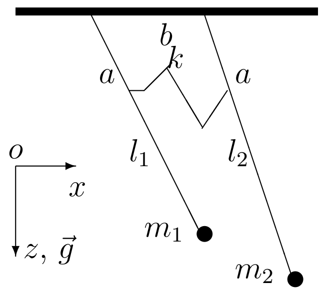


9.

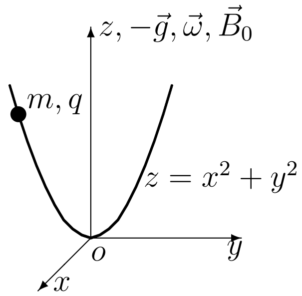
Завдання № **17**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

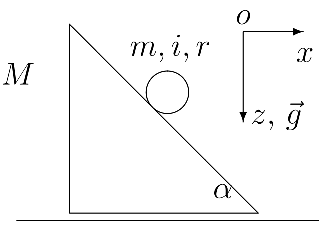
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



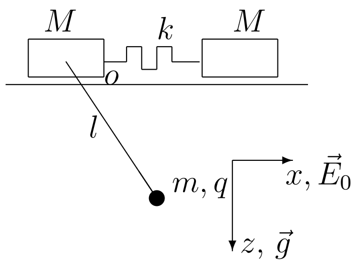
1.



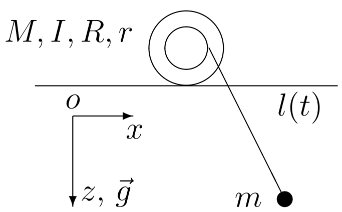
2.



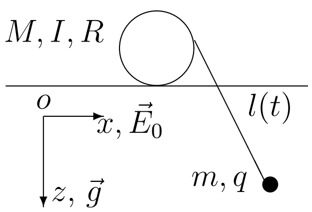
3.



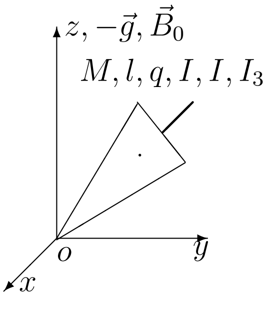
4.



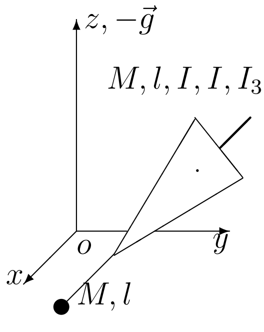
5.



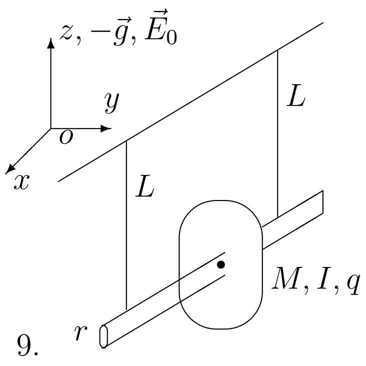
6.



7.



8.

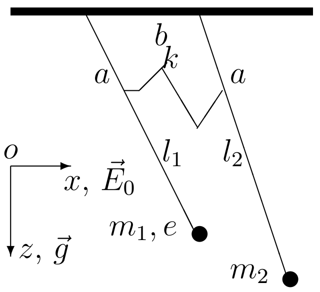


9.

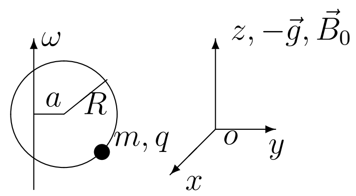
Завдання № **18**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

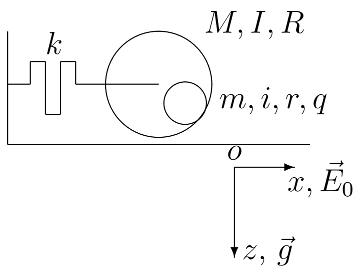
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



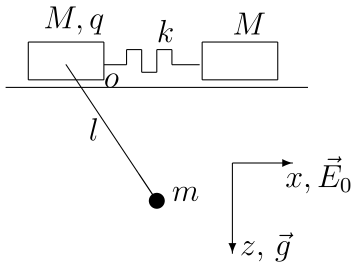
1.



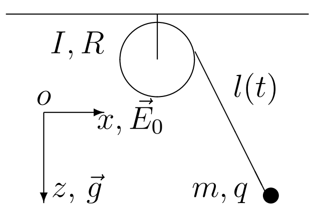
2.



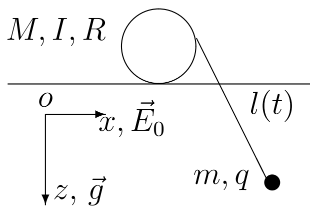
3.



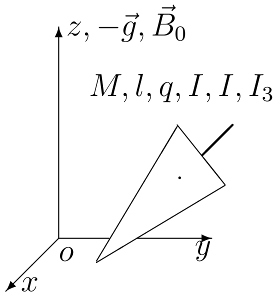
4.



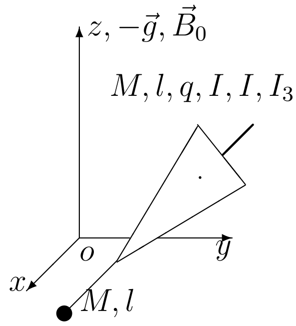
5.



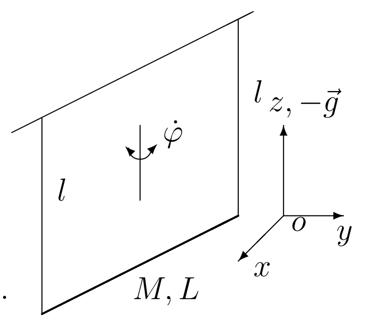
6.



7.



8.

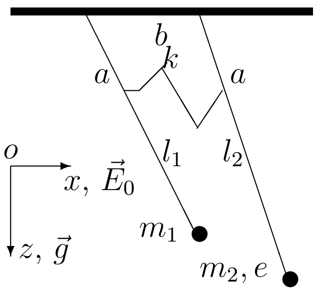


9.

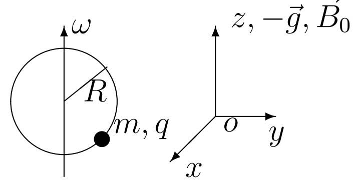
Завдання № **19**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

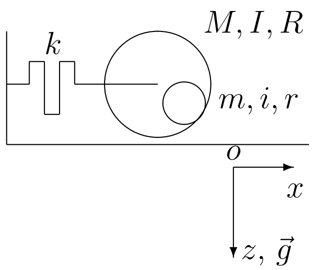
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



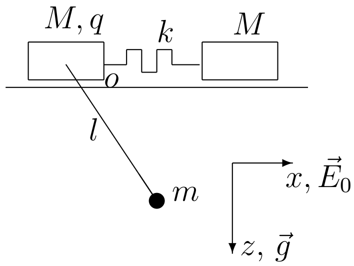
1.



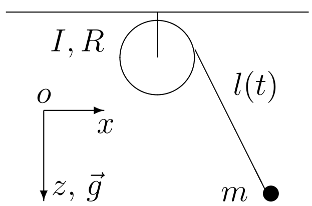
2.



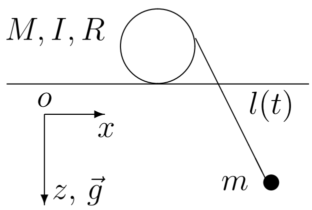
3.



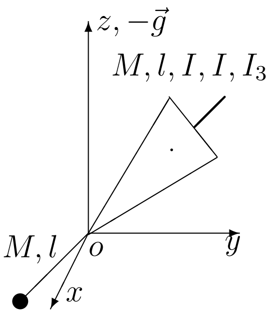
4.



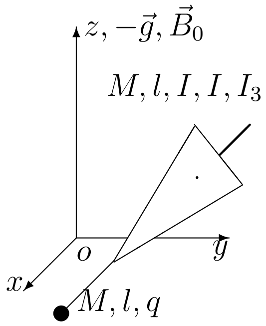
5.



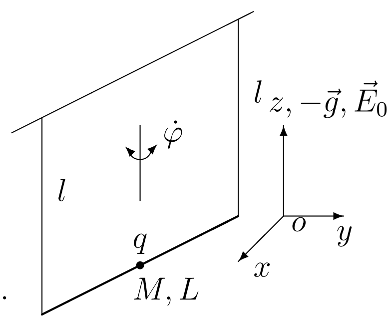
6.



7.



8.

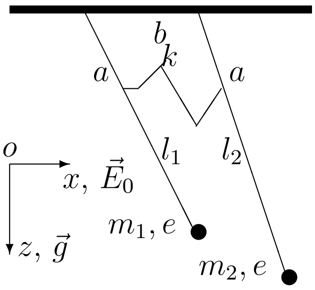


9.

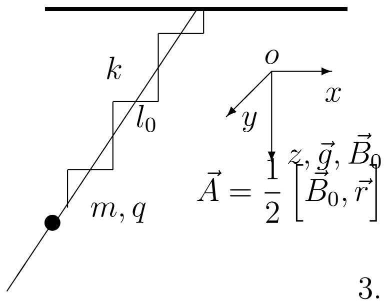
Завдання № **20**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

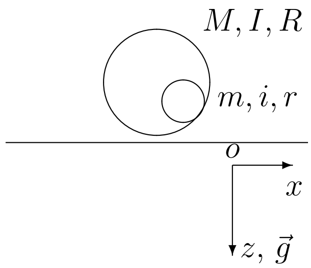
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



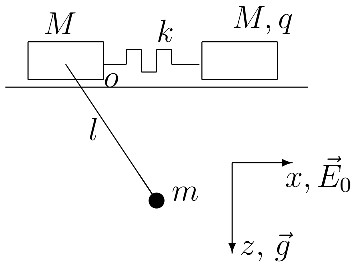
1.



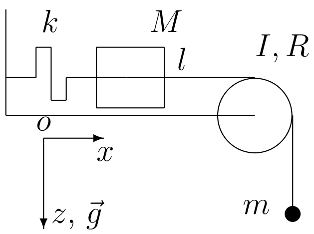
2.



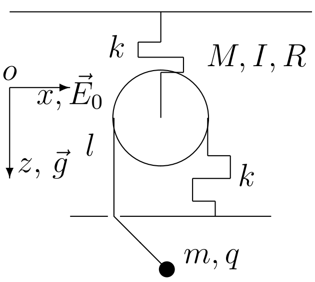
3.



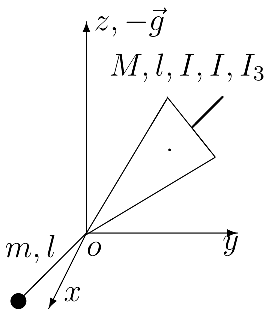
4.



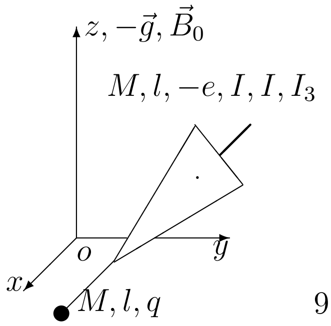
5.



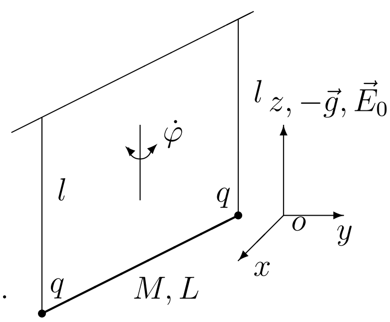
6.



7.



8.

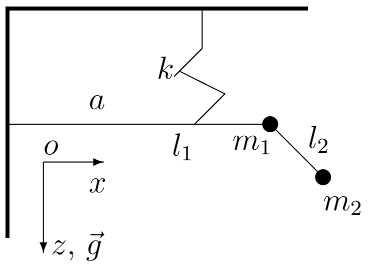


9.

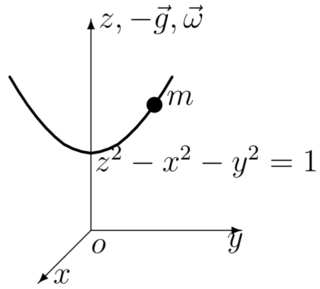
Завдання № **21**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

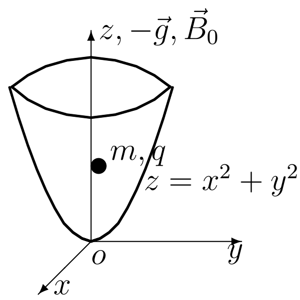
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



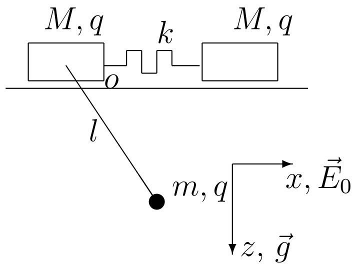
1.



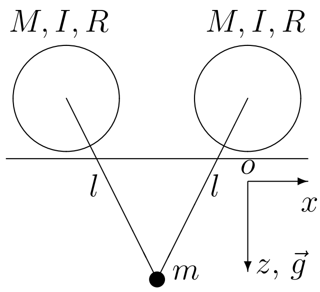
2.



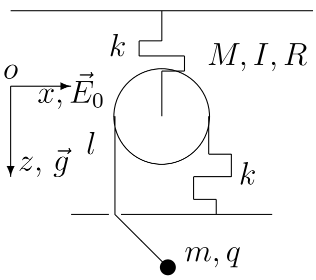
3.



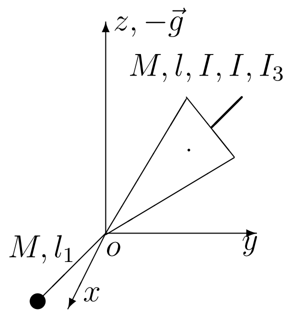
4.



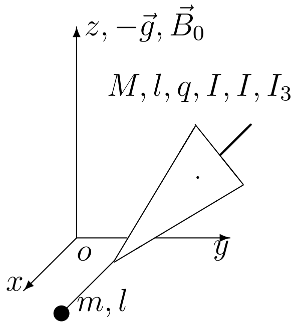
5.



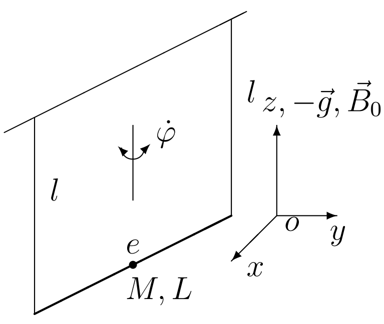
6.



7.



8.

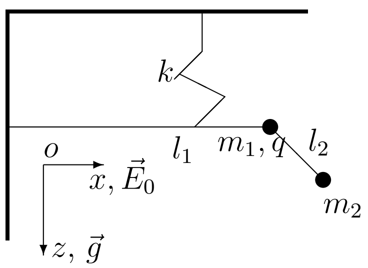


9.

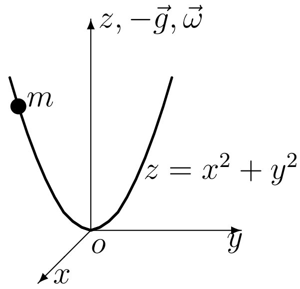
Завдання № **22**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

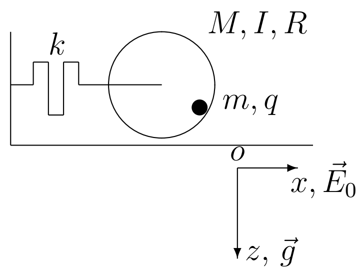
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



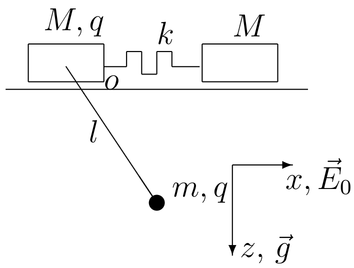
1.



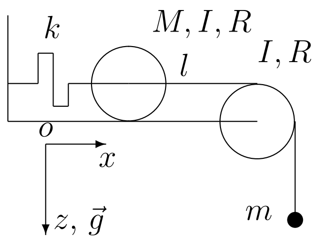
2.



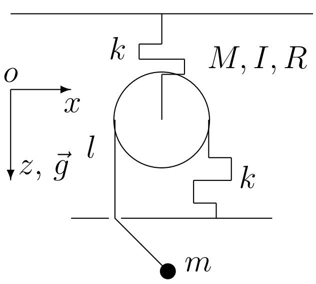
3.



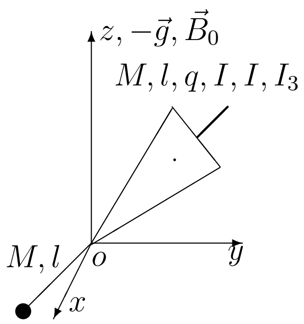
4.



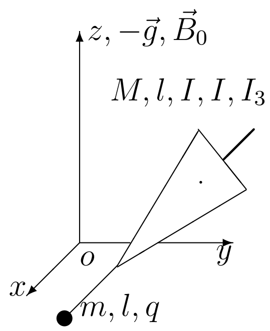
5.



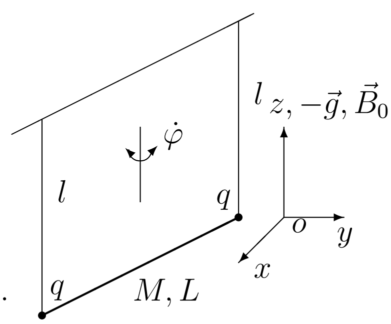
6.



7.



8.

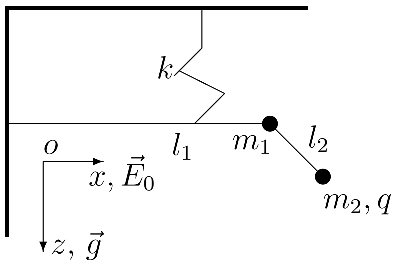


9.

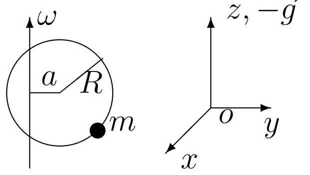
Завдання № **23**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

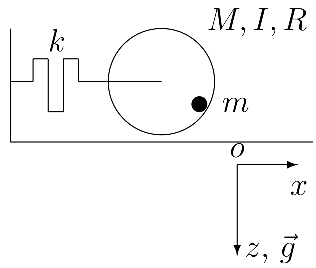
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



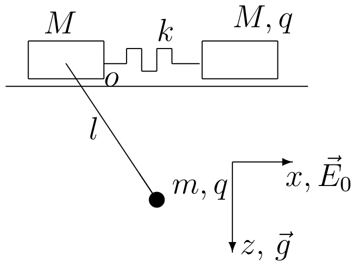
1.



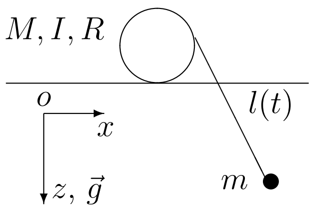
2.



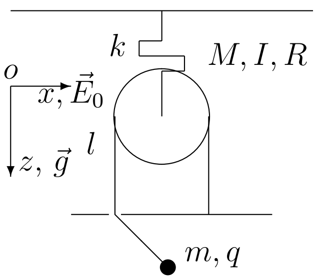
3.



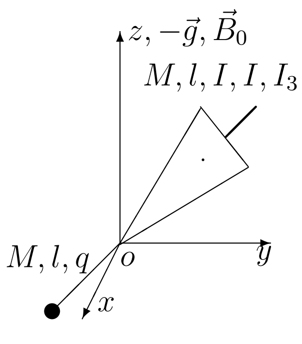
4.



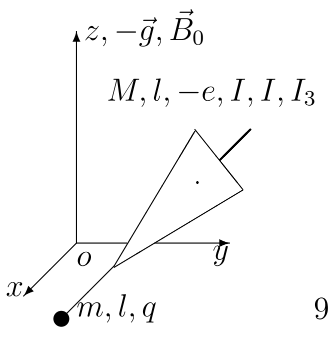
5.



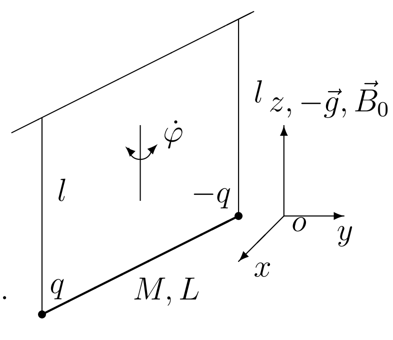
6.



7.



8.

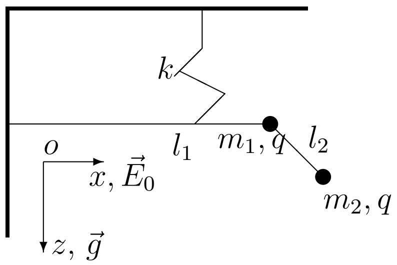


9.

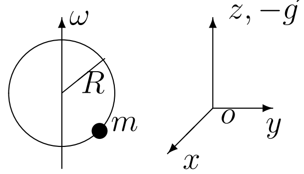
Завдання № **24**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

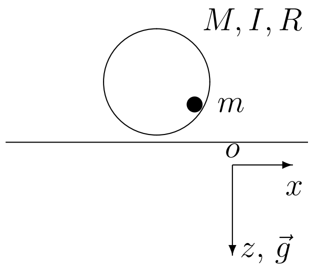
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



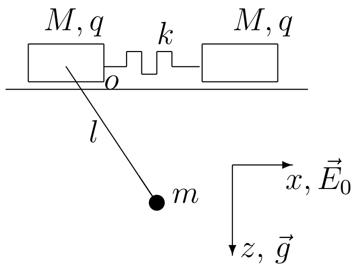
1.



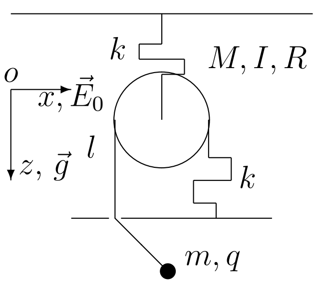
2.



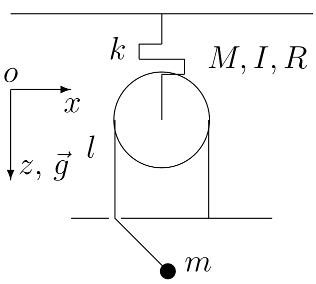
3.



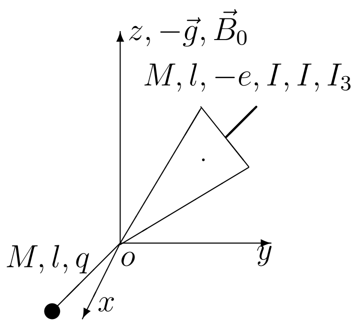
4.



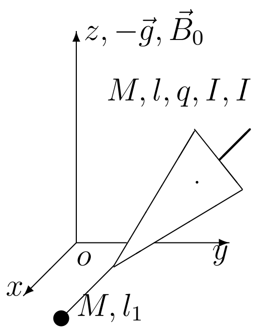
5.



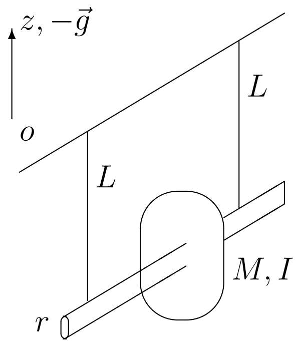
6.



7.



8.

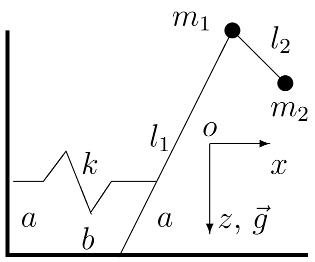


9.

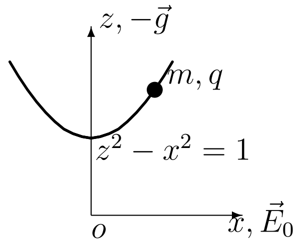
Завдання № **25**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

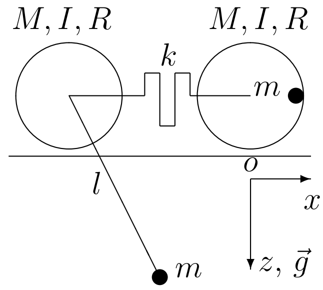
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



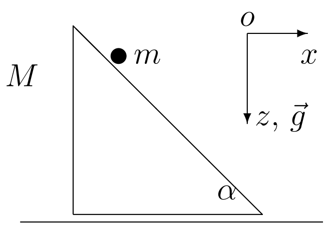
1.



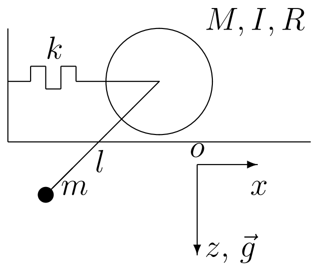
2.



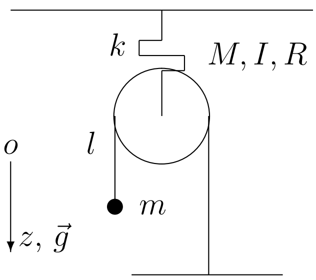
3.



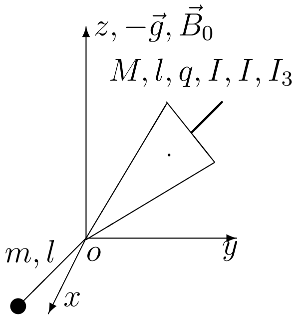
4.



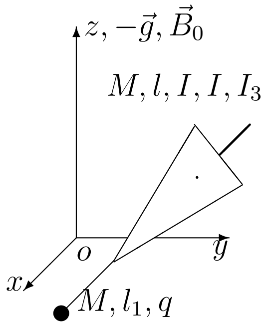
5.



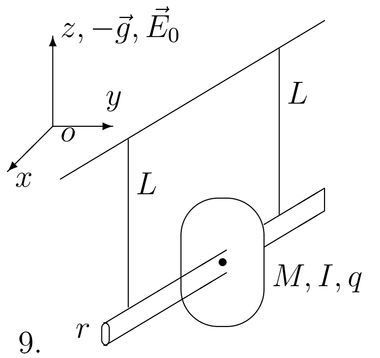
6.



7.



8.

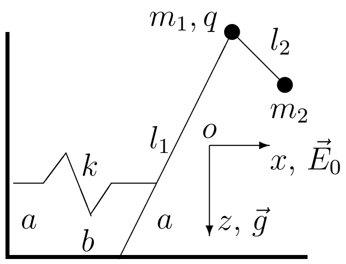


9.

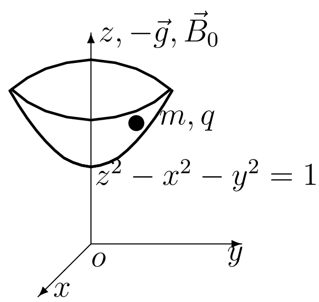
Завдання № **26**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

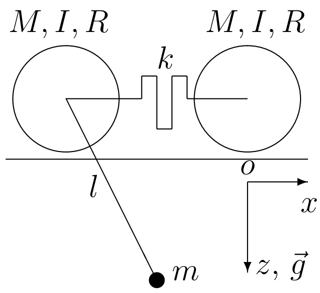
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



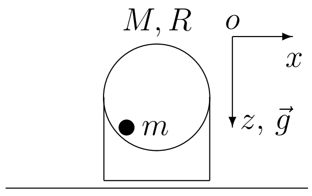
1.



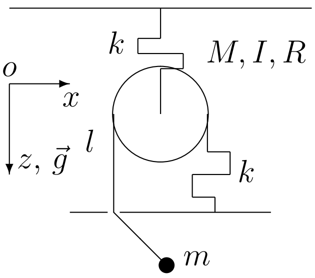
2.



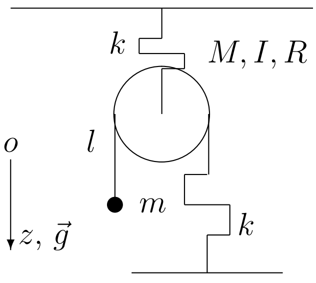
3.



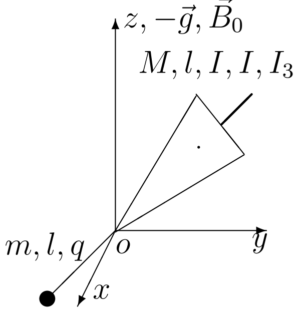
4.



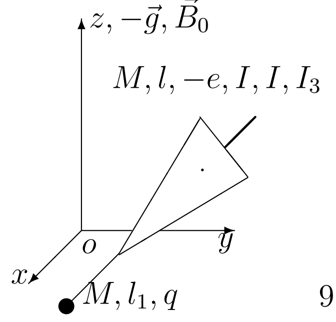
5.



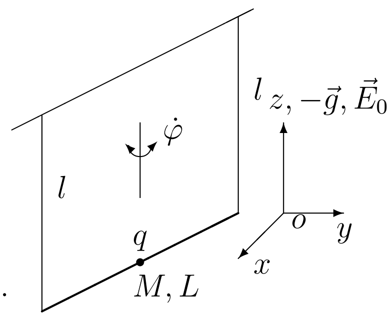
6.



7.



8.

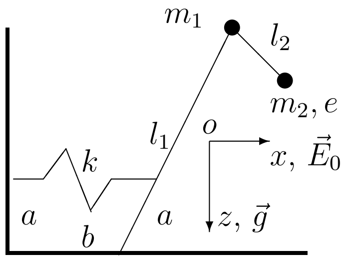


9.

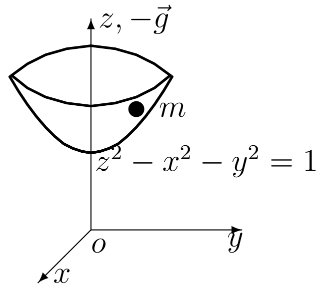
Завдання № **27**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

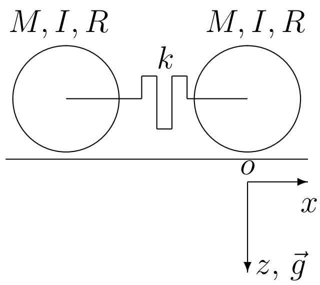
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



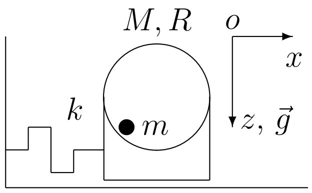
1.



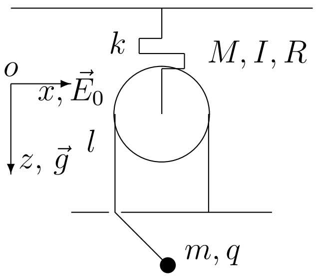
2.



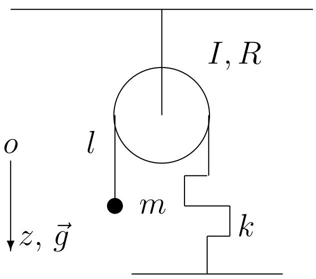
3.



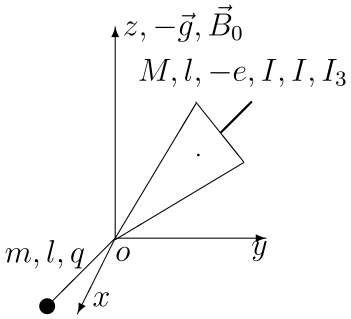
4.



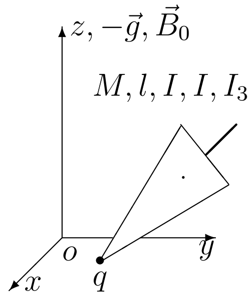
5.



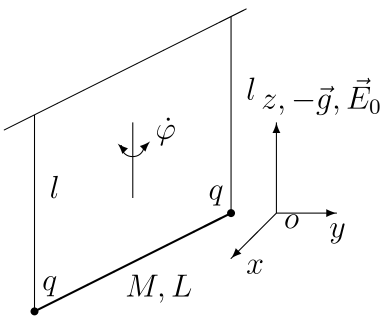
6.



7.



8.

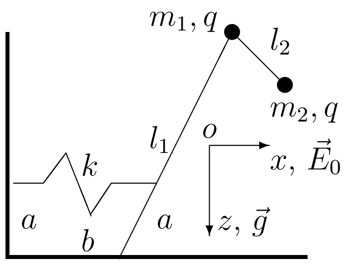


9.

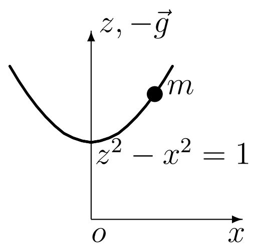
Завдання № **28**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

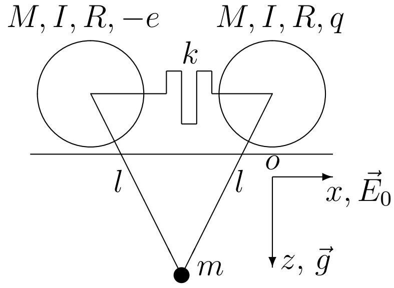
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



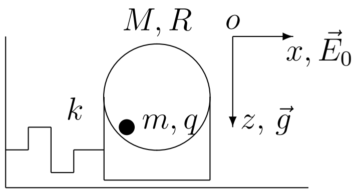
1.



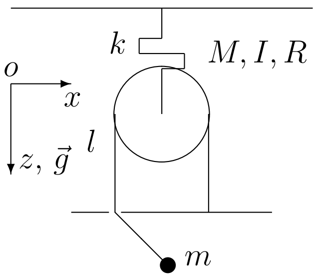
2.



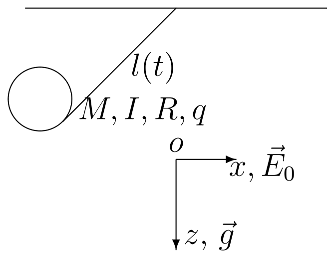
3.



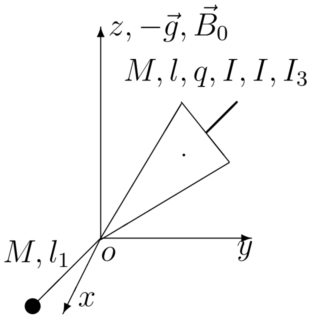
4.



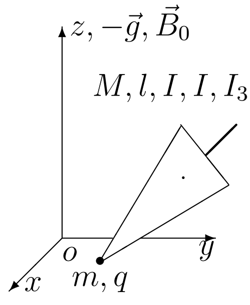
5.



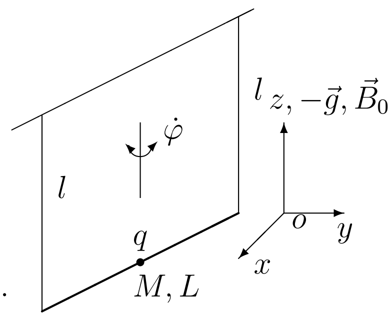
6.



7.



8.

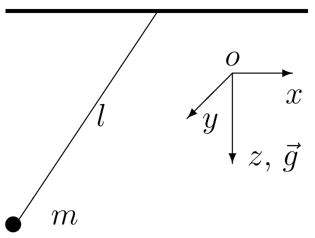


9.

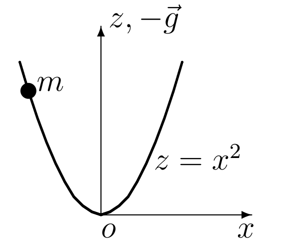
Завдання № **29**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

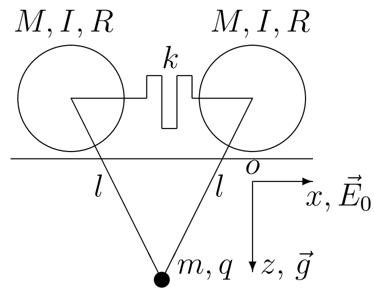
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



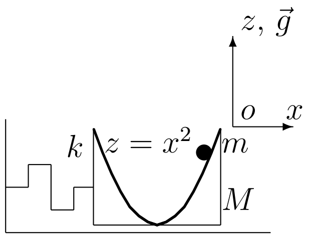
1.



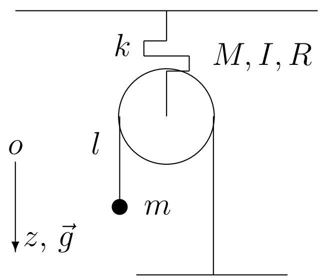
2.



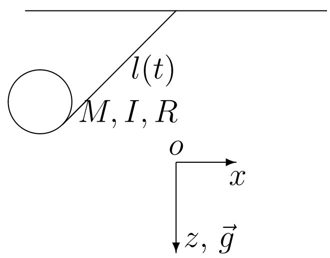
3.



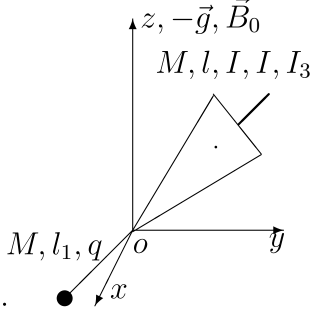
4.



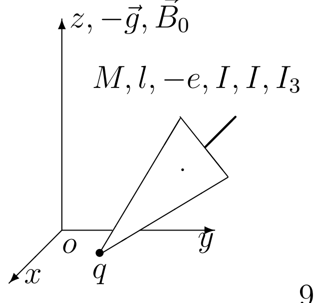
5.



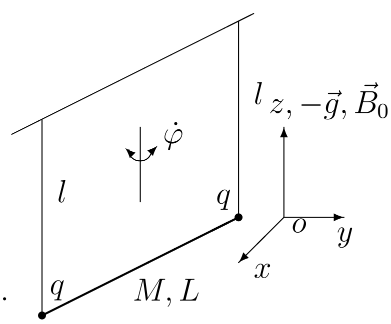
6.



7.



8.

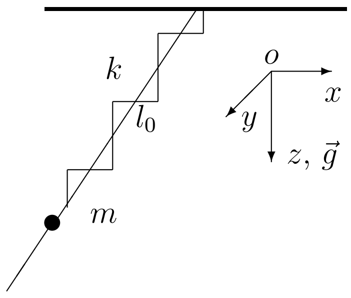


9.

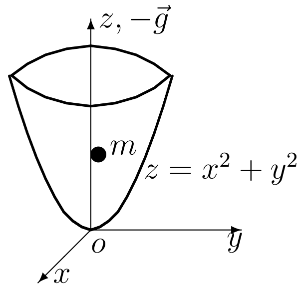
Завдання № **30**

Для наведених нижче механічних систем побудувати функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду і дослідити їх на предмет інтегровності у квадратурах. Якщо система інтегровна, то знайти всі квадратури. У випадку неінтегровності, знайти доступні квадратури та положення рівноваги, якщо воно існує.

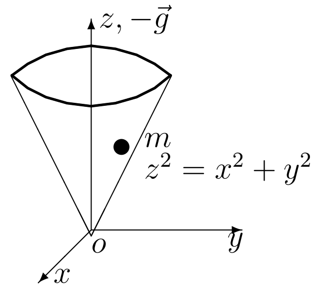
Кулонову взаємодію зарядів, якщо їх декілька, знехтувати. Вістря дзиги завжди лежить на площині Oxy, або у початку координат.



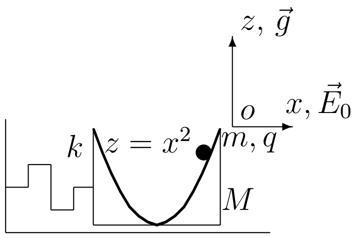
1.



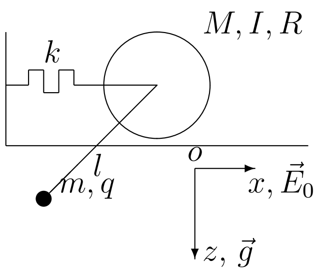
2.



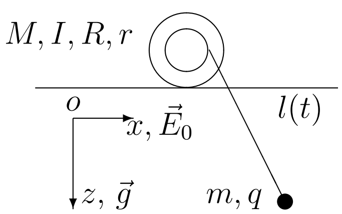
3.



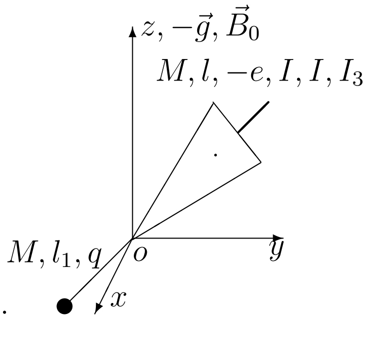
4.



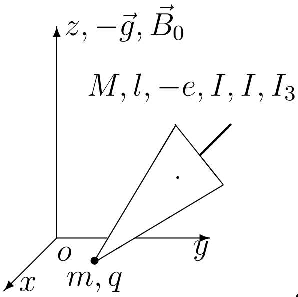
5.



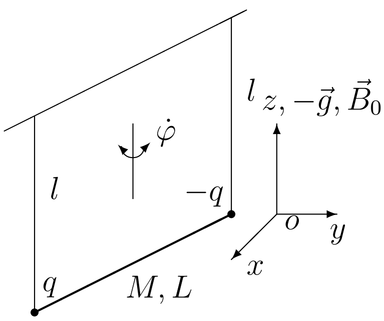
6.



7.



8.



9.

Додатки

У цьому Розділі представлені математичні вирази, формули та довідковий матеріал, що необхідний при вивченні Механіки, але його викладення занадто громіздке і виходить за її рамки за своїм змістом.

Додаток 1. Математичне представлення вектора та операції з векторами.

У механіці використовуються два представлення довільного вектора $\vec{a}$ у тривимірному евклідовому просторі: 1) розклад по так званих *базисних ортах* системи координат $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, які власне і є носіями векторних властивостей:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3 , \tag{Д1.1}$$

де a_1, a_2, a_3 – так звані *компоненти вектора*; 2) у вигляді так званого *вектора-стовпчика*, утвореного з компонент вектора наступним чином:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} . \tag{Д1.2}$$

Зауважимо, що існує і *вектор-рядок*, або ж *транспонований вектор*: $\vec{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$.

У механіці використовуються наступні математичні операції над векторами: довжина вектора, додавання і віднімання двох векторів, множення вектора на скаляр, або на матрицю, скалярне і векторне множення двох векторів.

а) *Довжина вектора* $\vec{a}$ у тривимірному евклідовому просторі – це невід'ємний скаляр рівний квадратному кореню із суми квадратів його компонент:

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \tag{Д1.3}$$

б) Найпростіше додати і відняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ згідно так званого *правила паралелограма*: у паралелограмі, побудованому на цих векторах, діагональ між точками їхнього спільного початку і кінця – це їх сума $\vec{a} + \vec{b}$, а діагональ від кінця $\vec{b}$ до кінця $\vec{a}$ – це їх різниця $\vec{a} - \vec{b}$ – Рис. Д.1 а).

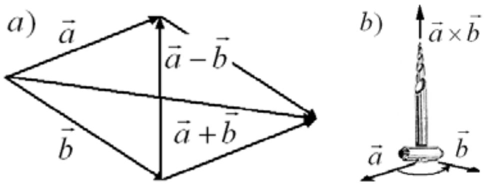


Рис. Д.1. Правила бінарних операцій із векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$: a) паралелограма для їх додавання та віднімання; b) правого свердлика для їх векторного добутку.

в) Множення вектора $\vec{a}$ на скаляр α зводиться до множення кожної його компоненти на це число:

$$\alpha \vec{a} = \vec{e}_1 \alpha a_1 + \vec{e}_2 \alpha a_2 + \vec{e}_3 \alpha a_3 \tag{Д1.4}$$

і змінює його довжину $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$. При $|\alpha| < 1$ вона зменшується, при $|\alpha| > 1$ – збільшується, а при $\alpha < 0$ – ще й змінюється його напрям на протилежний.

Матрицю A можна означити як узагальнення поняття вектор-стовпчика (Д1.2), у якому записано не один, а декілька вектор-стовпчиків послідовно один за одним. Тому її елементи, які позначимо як A_{ij}, мають два індекси, з яких перший вказує номер рядка, а другий – номер стовпчика. В механіці зустрічаються, як правило, квадратні матриці.

Множення вектора $\vec{a}$ зліва на матрицю A здійснюється за правилом так званого *матричного множення*, яке в даному випадку дає вектор-стовпчик k-ий елемент якого є сумою добутків елементів k-го рядка матриці на елементи вихідного вектор-стовпчика:

$$A\vec{a} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3 \\ A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3 \end{pmatrix}. \qquad (Д1.5)$$

Це множення змінює довжину вектора, а також повертає його на деякий кут. Можна також побудувати і добуток $\vec{a}^T \hat{A}$, який буде вектор-рядком. Довжину вектора можна записати як $a = \sqrt{\vec{a}^T \vec{a}}$, де під коренем виконується матричне множення.

г) Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (далі позначається крапкою між ними) – це число, яке визначається через їхні компоненти наступним чином:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \qquad (Д1.6)$$

або через їхні модулі: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$, де φ – кут між цими векторами.

д) Їхній векторний добуток (далі позначається хрестиком між ними) – це вектор, який визначається через їхні компоненти як визначник матриці, у якій перший рядок – це орти, другий – компоненти першого вектора, а третій – другого:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv \vec{e}_1\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) + \vec{e}_2\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) + \vec{e}_3\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right), \qquad (Д1.7)$$

а його модуль $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab\sin\varphi$. На практиці напрям векторного добутку визначає так зване *правило правого свердлика*: добуток має напрям вздовж гвинта свердлика, якщо загвинтити його на кут менший 180° так, щоб ручка повернулася від напряму вздовж $\vec{a}$ до напряму вздовж $\vec{b}$ – Рис. Д.1 b).

Тут варто звернути увагу на те, що результат векторного добутку двох векторів − це також вектор, тому його можна ще раз помножити вже на третій вектор або скалярно, або ж векторно. Такі вирази зустрічаються в механіці, тому випишемо без доведення їх основні властивості. Скалярний добуток вектора $\vec{c}$ на векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ це число. Він має властивість так званої циклічної перестановки співмножників:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}. \qquad (Д1.8)$$

Подвійний векторний добуток трьох векторів це вектор:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right), \qquad (Д1.9)$$

який розкладається по двох векторах внутрішнього добутку. Зауважимо, що його можна знову множити скалярно, або ж векторно на четвертий вектор, але такі конструкції в механіці не зустрічаються.

Додаток 2. Криволінійні системи координат.

Площини прямокутної ДСК перетинаються під прямими кутами. Для узагальнення цього означення можна замінити площини поверхнями, які називають *координатними поверхнями*, а прямі кути – довільними кутами. В математиці показано, що остання заміна значно ускладнює всі операції над векторами, заданими у таких системах. До того ж більшість задач фізики зручно досліджувати саме у прямокутних системах часто зі складними координатними поверхнями. Перетини цих поверхонь утворюють так звані *координатні лінії*. У ДСК вони прямі, а у інших системах координат деякі із них можуть бути кривими лініями. Тому такі координати називають *криволінійними ортогональними* координатами.

При побудові системи відліку у механіці (як на експерименті, так і в теорії) спочатку будують, бодай уявно, ДСК, а потім переходять до криволінійної системи, якщо вона краще відображає симетрію задачі. Найчастіше зустрічаються *циліндрична система координат* (ЦСК) та *сферична система координат* (ССК).

а) Прямокутна ДСК. Її ортогональні координатні поверхні – це площини, а їх перетини, тобто координатні лінії – прямі. Це осі системи, вздовж яких змінюються впорядковані координати $x, y, z \in (-\infty, +\infty)$, кожна з яких має розмірність довжини.

Їхні орти, які позначаються $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, або $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, або ж $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взаємно перпендикулярні між собою і мають одиничну довжину, тобто $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, де $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ і $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ − так званий *символ Кронекера*. Вони мають незмінний напрям у всіх точках простору – Рис. Д.2. Радіус-вектор точки P у цій системі записується як:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 . \qquad \text{(Д2.1)}$$

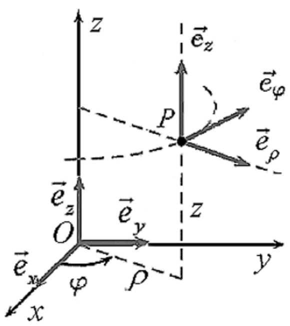


Рис. Д.2. Осі й орти ДСК і ЦСК. На координатних лініях ЦСК (штриховані), що проходять через точку P , змінюється лише одна координата. Координатні поверхні обох систем не зображені.

Окрім цього вони мають ще одну важливу властивість. Так, якщо орт $\vec{e}_y$ повернути навколо осі Ox за правилом правого свердлика на 90º – так званий *правий поворот*, то він співпаде з ортом $\vec{e}_z$ − Рис. Д.2. Правий поворот $\vec{e}_x$ навколо осі Oz дає $\vec{e}_y$, а орта $\vec{e}_z$ навколо осі Oy − дає $\vec{e}_x$. Таку систему координат називають правою, а ці властивості записують за допомогою векторного добутку:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x. \qquad \text{(Д2.2)}$$

Такі ж правила справедливі для всіх правих прямокутних систем координат, якщо в записі $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k$ індекси i, j, k можна циклічно переставити по їх зростанню, наприклад, $3,1,2 \to 1,2,3$, або $y,z,x \to x,y,z$. Якщо ж така перестановка неможлива, то у правій частині потрібно поставити знак мінус.

б) Прямокутна ЦСК. Її координатні поверхні − це циліндр з віссю вздовж осі Oz; площина, якій належить вісь Oz; площина, перпендикулярна до осі Oz. Перетини цих поверхонь утворюють координатні криві у точці P: промінь, перпендикулярний до Oz; коло у перпендикулярній до осі Oz площині з центром на Oz; пряму, паралельну Oz – Рис. Д.2. Відповідно цим координатним кривим впорядковано і набір координат, а саме: довжина $\rho \ge 0$, кут $\varphi \in [0, 2\pi]$, довжина $z \in (-\infty, +\infty)$. Орти позначають як $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ і $\vec{e}_z$. Для радіус-вектора точки P у ДСК і ЦСК справедливі наступні вирази – див. Рис. Д.2:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z. \qquad (Д2.3)$$

З цієї формули та з Рис. Д.2, проектуючи відрізок ρ на декартові осі, можна знайти зв'язок координат точки, заданих в ДСК і ЦСК:

$$x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi, \; z = z. \qquad (Д2.4)$$

Звідси легко отримати й обернені вирази:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ і } \varphi = \arctan(y/x). \qquad (Д2.5)$$

Підстановка (Д2.4) у (Д2.3) дає:

$$\vec{r} = \vec{e}_x\rho\cos\varphi + \vec{e}_y\rho\sin\varphi + \vec{e}_z z = \rho\left(\vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi\right) + \vec{e}_z z \equiv \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z. \qquad (Д2.6)$$

Звідси знаходимо вираз для орта

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi \equiv \vec{e}_\rho(\varphi), \qquad (Д2.7)$$

який виявляється залежним від кута φ, виражається через орти $\vec{e}_x$ та $\vec{e}_y$, має одиничну довжину, оскільки $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \cos^2\varphi + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ і ортогональний з ортом $\vec{e}_z$, оскільки $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0$. З (Д2.7) видно, що він має різний напрям, в залежності від кута φ. Наприклад, на осі Ox при $x > 0$ він напрямлений так само як і орт $\vec{e}_x$, але при $x < 0$ − він протилежний до $\vec{e}_x$, а на осі Oy при $y > 0$ він напрямлений так само як і $\vec{e}_y$.

Щоб ЦСК була правою, так само як і ДСК, повернемо орт $\vec{e}_\rho$ вправо на кут 90° навколо осі Oz. Отримаємо орт:

$$\vec{e}_\rho(\varphi + \pi/2) \equiv \vec{e}_\varphi(\varphi) = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi, \qquad (Д2.8)$$

який має одиничну довжину і перпендикулярний до $\vec{e}_\rho$ і $\vec{e}_z$. Таким чином два орти ЦСК мають сталу довжину, перпендикулярні між собою, але мають різний напрям в різних точках простору. Тому далі їх будемо називати *змінними ортами*.

Можна переконатися безпосереднім обчисленням, що для ортів ЦСК умови (Д2.2) мають вигляд:

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho. \qquad (Д2.9)$$

Вирази для $\vec{e}_\rho$ і $\vec{e}_\varphi$ можна обернути відносно $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$. Це дає:

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi, \qquad \vec{e}_y = \vec{e}_\rho\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi. \qquad (Д2.10)$$

Існує більш загальний спосіб пошуку орта $\vec{e}_\varphi$ методом диференціювання, який ілюструє Рис. Д.3. З нього видно, що $\vec{e}_\rho(\varphi + \Delta\varphi) = \vec{e}_\rho(\varphi) + \vec{e}_\varphi(\varphi)\Delta\varphi$ при $\Delta\varphi \to 0$.

Тому орт $\vec{e}_\varphi$, який напрямлений по дотичній до кола і вздовж якого змінюється кут φ, можна отримати як похідну орта $\vec{e}_\rho(\varphi)$ по куту φ:

$$\vec{e}_\varphi(\varphi) = \lim_{\vartriangle\varphi \to 0} \frac{\vec{e}_\rho(\varphi + \vartriangle\varphi) - \vec{e}_\rho(\varphi)}{\vartriangle\varphi} = \frac{d\vec{e}_\rho(\varphi)}{d\varphi} = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi . \qquad (Д2.11)$$

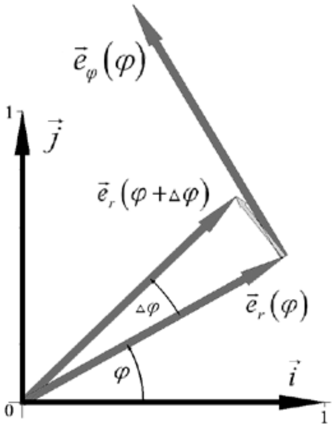


Рис. Д.3. Побудова орта $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ ЦСК, перпендикулярного до орта $\vec{e}_\rho(\varphi)$. Зміщення орта $\vec{e}_\varphi(\varphi)$ при зміні кута φ на малу величину $\vartriangle\varphi$ може лише повернути його, оскільки він має сталу довжину. Цей поворот відбувається внаслідок додавання малого вектора, майже перпендикулярного до $\vec{e}_\rho(\varphi)$, із довжиною, яка пропорційна куту $\vartriangle\varphi$.

в) Прямокутна ССК. Її координатні поверхні − це сфера навколо початку координат, конус з вершиною там же і віссю вздовж осі Oz, площина, якій належить вісь Oz. Перетини цих поверхонь утворюють координатні криві у точці P – див. Рис. Д.4, а саме: промінь з початку координат; коло з центром у початку координат, у площині якого лежить вісь Oz; коло у перпендикулярній до цієї осі площині, з центром на Oz. Відповідно кривим впорядковано набір координат: довжина $\rho \geq 0$, кут $\theta \in [0, \pi]$, кут $\varphi \in [0, 2\pi]$. Орти позначають як $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$. Радіус-вектор точки P у ДСК і ССК − див. Рис. Д.4, задається як:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r . \qquad (Д2.12)$$

Проектуючи вектор $\vec{r}$ на декартові координати, можна виразити їх через сферичні:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (Д2.13)$$

і потім знайти обернені формули, які для меншої громіздкості записують у вигляді:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arccos(z/r),\ \varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x). \qquad (Д2.14)$$

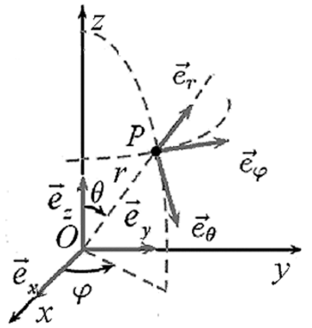


Рис. Д.4. Осі декартової і сферичної систем координат і та їх орти. Вздовж координатних ліній ССК, які проходять через точку P (штриховані лінії), змінюється лише одна координата системи. Координатні поверхні систем не зображені.

Використовуючи вирази (Д2.13), та формулу диференціювання змінного орта по куту (Д2.11), можна показати, що:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta, \\ \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \vec{e}_z \sin\theta, \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi. \end{aligned} \qquad (Д2.15)$$

Можна переконатися безпосереднім обчисленням, що для ортів ЦСК умови (Д2.2) мають вигляд:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r. \qquad (Д2.16)$$

Залежності (Д2.15) можна обернути відносно декартових ортів.

Додаток 3. Формула Тейлора.

В математичному аналізі доводиться теорема про справедливість так званого *ряду Тейлора,* згідно якої значення функції $f(t+\Delta t)$, обчислюється наступним чином:

$$f(t+\vartriangle t) = f(t) + \dot{f}(t)\vartriangle t + \frac{1}{2!}\ddot{f}(t)(\vartriangle t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{f}(t)(\vartriangle t)^3 + \frac{1}{4!}\ddddot{f}(t)(\vartriangle t)^4 + \ldots, \quad (Д3.1)$$

де кількість крапок над функцією показує порядок похідної по аргументу, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ − факторіал числа n, а відкинуті доданки можна легко виписати за аналогією із наведеними. Ця формула дозволяє проводити наближені обчислення функції в деякій точці, знаючи значення її та її похідних в іншій точці.

Як приклад розглянемо функцію $f(t) = \cos(t)$ та обчислимо її наближене значення при $x \equiv t + \vartriangle t = 0.4$. Згідно формули (Д3.1) нам потрібно знати значення функції та хоча б декількох її похідних у деякій точці t, щоб потім застосувати її при $\vartriangle t = x - t$. Оскільки похідні заданої функції є синусами та косинусами, то можна вибрати $t = 0$ і обчислити всі їх значення. В результаті отримуємо:

$$\cos(0.4) = \cos(0) - \sin(0)\left(0.4\right) - \frac{1}{2!}\cos(0)\left(0.4\right)^2 + \frac{1}{3!}\sin(0)\left(0.4\right)^3 + \frac{1}{4!}\cos(0)\left(0.4\right)^4 + \ldots \approx$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2!}\left(0.4\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(0.4\right)^4 \approx 0.921067,$$

в той час як більш точне значення $\cos(0.4) \approx 0.921061$ відрізняється лише у шостому знаку.

Додаток 4. Швидкість і прискорення в різних системах координат.

Для обчислення вектора швидкості необхідно знайти похідну по часу від вектора, який потрібно задавати у вигляді (Д1.1). Отже, у випадку довільної системи координат із змінним напрямом ортів, швидкість має вигляд:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3\right) = \dot{\vec{e}}_1 a_1 + \dot{\vec{e}}_2 a_2 + \dot{\vec{e}}_3 a_3 + \vec{e}_1 \dot{a}_1 + \vec{e}_2 \dot{a}_2 + \vec{e}_3 \dot{a}_3, \qquad (Д4.1)$$

звідки видно, що потрібно обчислювати похідні і від ортів і від компонент вектора.

а) У ДСК напрям ортів сталий, тому компоненти швидкості, прискорення та вищі похідні будуть визначатися лише похідними координат по часу:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \quad \text{або} \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \qquad (Д4.2)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \text{або} \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \qquad (Д4.3)$$

б) У ЦСК у виразі для вектора $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ є орт зі змінним напрямом $\vec{e}_\rho(\varphi)$. Щоб не шукати його похідні по часу, виразимо вектор швидкості в ДСК через координати в ЦСК: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, і обчислимо похідні від них:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \left(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\vec{e}_x + \left(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \qquad (Д4.4)$$

Тепер сюди підставляємо вирази для ортів ДСК через орти ЦСК із (Д2.10): $\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cos\varphi - \vec{e}_\varphi \sin\varphi$, $\vec{e}_y = \vec{e}_\rho \sin\varphi + \vec{e}_\varphi \cos\varphi$, $\vec{e}_z = \vec{e}_z$ і після нескладних, але громіздких перетворень отримаємо вираз для швидкості в ЦСК:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \,, \tag{Д4.5}$$

звідки для її компонент знаходимо:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}\,, \tag{Д4.6}$$

де $\dot{\rho}$, $\rho\dot{\varphi}$ і $\dot{\varphi}$ – називаються *радіальною, коловою і кутовою швидкостями* частинки, відповідно.

Якщо ж взяти формально похідну по часу від радіус-вектора частинки $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$, заданого в ЦСК, то отримаємо вираз $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z$. Порівнявши його із (Д4.5), знаходимо похідну орта по часу:

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \,, \tag{Д4.7}$$

яку ми не обчислювали безпосередньо.

Аналогічно до попередніх обчислень можна показати, що прискорення в ЦСК має наступні компоненти:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}\,, \tag{Д4.8}$$

де окремі вирази для прискорення називаються: $\ddot{\rho}$ – *радіальним*, $\rho\dot{\varphi}^2$ – *відцентровим* (має напрям вздовж орта $\vec{e}_\rho$ від осі обертання), $\ddot{\varphi}$ – *кутовим*, $2\dot{\rho}\dot{\varphi}$ – *Коріолісовим*.

в) Аналогічно до попереднього випадку, можна показати що компоненти швидкості та прискорення у ССК мають наступний вигляд:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}. \tag{Д4.9}$$

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta. \end{aligned} \tag{Д4.10}$$

Додаток 5. Матриця поворотів Ейлера.

З ейлервого повороту на кут прецесії φ (Рис.2), та з Рис. Д.5 випливає, що координати довільної точки перетворюються наступним чином: $\tilde{x}_3 = x_3$, $\tilde{x}_1 = \rho\cos(\arccos(x_1/\rho) - \varphi)$ та $\tilde{x}_2 = \rho\sin(\arccos(x_1/\rho) - \varphi)$, де $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ – її відстань від осі Oz. Після розкриття і спрощення тригонометричних виразів отримуємо: $\tilde{x}_1 = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi$, $\tilde{x}_2 = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi$. З іншого боку, ортогональні перетворення перетворюють координати вектора як $\tilde{x}_i = \alpha_{ik}x_k, \ \ i = 1,2,3$.Тоді, вираз для $\tilde{x}_1$ має вигляд: $\tilde{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3$. Порівнюючи між собою обидва вирази для $\tilde{x}_1$, знаходимо: $\alpha_{11} = \cos\varphi$, $\alpha_{12} = \sin\varphi$, $\alpha_{13} = 0$. Діючи аналогічними чином для всіх координат, знаходимо матрицю цього повороту у вигляді:

$$A_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{Д5.1}$$

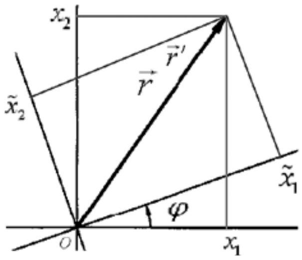


Рис. Д.5. Зв'язок координат P-системи з координатами L-системи при правому повороті першої відносно другої навколо їхньої спільної осі Oz на кут прецесії φ. Вісь Oz направлена перпендикулярно площині рисунка до читача.

Решту матриць легко отримати з $A_z(\varphi)$ перестановкою відповідних рядків і стовпчиків та перепозначенням кута. Зокрема, таким чином можна знайти, що:

$$A_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{Д5.2}$$

$$A_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{Д5.3}$$

Результуюча матриця є упорядкованим добутком матриць всіх ейлерових поворотів:

$$A(\theta,\varphi,\psi) = A_z(\psi)\,A_x(\theta)\,A_z(\varphi) = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - c_\theta s_\varphi s_\psi & s_\varphi c_\psi + c_\theta c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - c_\theta s_\varphi c_\psi & -s_\varphi s_\psi + c_\theta c_\varphi c_\psi & s_\theta c_\psi \\ s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi & c_\theta \end{pmatrix}, \tag{Д5.4}$$

де для скорочення запису введено позначення $c_\alpha = \cos\alpha$ та $s_\alpha = \sin\alpha$.

Додаток 6. Оператор градієнта.

Градієнт – це специфічний оператор похідної від функції по її векторному аргументу. Він ще має назву *набла*, а у ДСК його вигляд найпростіший:

$$\vec{\nabla} \equiv \mathrm{qrad} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{Д6.1}$$

Його дія на скалярну функцію $f(\vec{r})$ дає вектор $\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{i}\,\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}$, який показує напрям і величину її зростання у точці $\vec{r}$. На Рис. Д.6 наведено графік функції $f(x,y)$ та вектори її градієнта в різних точках площини Oxy.

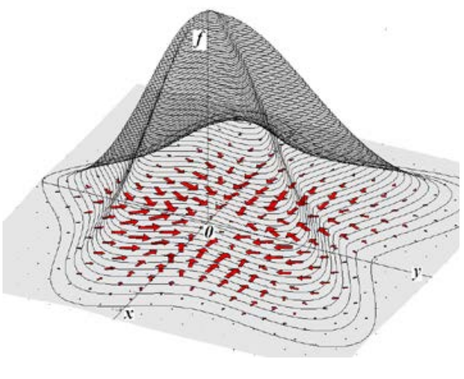


Рис.Д.6. Поверхня та лінії сталих значень функції $f(x,y)$ відкладені вздовж осі Oz. Функція при великих аргументах $|x,y| \gg 1$ прямує до нуля. У площині Oxy також зображена множина векторів її градієнта, обчислених в однаково віддалених одна від одної точках. Градієнт напрямлений у бік максимального зростання функції, а його довжина тим більша, чим швидше зростає функція.

Оператор набла може діяти і на векторну функцію, якщо його перемножити з нею скалярно, або векторно, наприклад $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$. Існують також і його степені, зокрема $\vec{\nabla}^2$.

Рекомендована література

Основна

1. Макарець М.В., Єжов С.М., Романенко О.В. Класична механіка. – К.: ВПЦ Київський Університет. 2008.
2. Федорченко А.М. Теоретична фізика. т. 1. Класична механіка і електродинаміка. – К.: Вища школа, 1992.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. т. I. Механика. – М.: Наука, 1973.
4. Гречко Л.Г., Макарець М.В. Збірник задач з теоретичної фізики. Класична механіка. – К: ВПЦ Київський Університет. 2011.
5. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – Москва: Высшая школа,1984.
6. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – Москва, Высшая школа,1972.

Додаткова

7. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматгиз, 1960.
8. Голдстейн Г. Классическая механика. Пер. с англ. Рубашова А.Н. – М.: ГИТТЛ, 1957.
9. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.
10. Парс Л.А. Аналитическая динамика. Пер. с англ. Лурье К.А. – М.: Наука, 1971.
11. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. – М.: Наука, 1969.
12. Павленко Ю.Г. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
13. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.