

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В.М. Хотяїнцев, О.І. Якименко

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ
з курсу "Методи математичної фізики".
Спеціальні функції математичної фізики.

Київ 2021

Навчальне видання

Додаткові задачі з курсу "Методи математичної фізики".

Спеціальні функції математичної фізики.

В.М. Хотяїнцев, О.І. Якименко, - К. 2021. -33 с.

Зміст

1	Спеціальні функції та їх властивості у фізичних задачах	4
1.1	Задачі на циліндричні функції. Аналітичне продовження як метод побудови розв'язку на всій числовій осі	4
1.2	Задачі на вироджену гіпергеометричну функцію і поліноми Лаґерра	5
1.3	Задачі на гіпергеометричну функцію	6
2	Спеціальні функції математичної фізики як розв'язки рівняння гіпергеометричного типу	9
2.1	Основні властивості спеціальних функцій	9
2.2	Задачі з теорії спеціальних функцій	14
2.3	Застосування теорії спеціальних функцій до задач квантової механіки	18
3	Додаток	22
3.1	Гамма-функція Ейлера	22
3.2	Поліноми Лежандра	24
3.3	Поліноми Лаґерра	25
3.4	Поліноми Ерміта	26
3.5	Циліндричні функції	27
3.6	Гіпергеометрична функція	28
3.7	Вироджені гіпергеометричні функції	30
3.8	Інтегральні перетворення	30
3.8.1	Перетворення Лапласа	30
3.8.2	Перетворення Фур'є	31
3.8.3	Перетворення Ганкеля	32

Вступ

У методичній розробці зібрано задачі підвищеної складності на застосування спеціальних функцій у задачах математичної і теоретичної фізики, що пропонуються студентам в якості додаткових завдань для самостійної роботи протягом другого семестру вивчення курсу математичної фізики. Додаток містить коротку довідкову інформацію про властивості спеціальних функцій математичної фізики.

Спеціальними функціями називають функції, що часто зустрічаються в різноманітних задачах математичної фізики і, як правило, не виражаються через елементарні функції. Для спеціальних функцій існують представлення у вигляді нескінченних рядів або інтегралів. Спеціальні функції є розв'язками певних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами. До спеціальних функцій математичної фізики відносять гіпергеометричні, сферичні та циліндричні функції, класичні ортогональні поліноми та ін.

1 Спеціальні функції та їх властивості у фізичних задачах

1.1 Задачі на циліндричні функції. Аналітичне продовження як метод побудови розв'язку на всій числовій осі

1. Надбар'єрне відбивання. Квантова частинка з енергією $E > 0$ проходить над експоненційним краєм нескінченно глибокої потенціальної ями $U(x) = -U_0 e^{x/a}$, $U_0 > 0$, $a > 0$. Виразити хвильову функцію для випадків падіння частинки справа і зліва через одну з циліндричних функцій. Розрахувати незалежно коефіцієнти проходження і відбивання для одного з випадків і перевірити виконання закону збереження $T + R = 1$. Побудувати графік залежності коефіцієнта відбивання від енергії. В якій області простору реально формується відбита хвиля? Де знаходиться її центр, і якою є її ширина? Який край слід вважати плавним, а який різким? Запишіть відповідну умову у вигляді нерівності на довжину a . Який фізичний зміст має довжина, з якою треба порівнювати довжину a ?

Теорія: Існує клас диференціальних рівнянь, розв'язки яких виражаються через циліндричні функції. До таких рівнянь приводять різноманітні фізичні задачі. Зокрема, якщо в диференціальному рівнянні Бесселя виконати заміни невідомої функції $w = z^\alpha u$ і незалежної змінної $x = cz^\beta$, то отримуємо диференціальне рівняння

$$z^2 w'' + (1 - 2\alpha)zw' + [\beta^2 c^2 z^{2\beta} - (\nu^2 \beta^2 - \alpha^2)]w = 0,$$

розв'язками якого є $w(z) = z^\alpha Z_\nu(cz^\beta)$, де Z_ν – циліндрична функція порядку ν (див. довідник [7] п. 9.1.53).

2. Аналітичне продовження як метод побудови розв'язку. Знайти коефіцієнти відбивання і проходження частинки з енергією $E = 0$ через параболічний потенціальний бар'єр $U(x) = -m\omega^2 x^2/2$. Для цього виразити через циліндричні функції розв'язок рівняння Шредингера для випадку падіння частинки зліва, спочатку в області $x > 0$, а потім продовжити його на область $x < 0$ за допомогою формул аналітичного продовження циліндричних функцій.

3. Як відомо, рівняння Шредингера для стаціонарних станів частинки з лінійним потенціалом зводиться до рівняння Ейрі. Виразити його розв'язки при $x > 0$ і $x < 0$ через циліндричні функції. Побудувати розв'язок, обмежений на всій числовій осі, аналітично продовживши розв'язок, обмежений при $x > 0$, на область $x < 0$ за допомогою степеневих рядів. Знайти асимптотики розв'язку при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$; порівняти результат з асимптотиками функції Ейрі та її представленням через циліндричні функції, що є у довідниках.

1.2 Задачі на вироджену гіпергеометричну функцію і поліноми Лаґерра

Теорія: Рівняння і спектральні задачі, розв'язки яких виражаються через вироджену гіпергеометричну функцію і поліноми Лаґерра [8], §38, [3], [5] гл. 6.

4. Для частинки у потенціалі Морзе і довільної енергії частинки в області дискретного спектра знайти і дослідити наступні розв'язки стаціонарного рівняння Шредингера: а) обмежений при $x \rightarrow -\infty$, дослідити поведінку при $x \rightarrow \infty$; б) обмежений при $x \rightarrow \infty$, дослідити поведінку при $x \rightarrow -\infty$.

5. Побудувати розв'язки рівняння Шредингера з потенціалом $U(x) = U_0 (2e^{-x/a} - e^{-2x/a})$, $U_0 > 0$, які відповідають проходженню частинки з енергією $E > 0$ через потенціальний бар'єр і над ним для випадків а) падіння зліва, б) падіння справа. Знайти залежність коефіцієнтів проходження і відбивання від енергії; перевірити їх значення для $E = U_0$, у граничному випадку параболічного бар'єра.

6. Знайти необхідні заміни невідомої функції та аргументу і звести стаціонарне рівняння Шредингера для гармонічного осцилятора до виродженого гіпергеометричного рівняння (ВГР). Записати загальний розв'язок рівняння Шредингера для довільної додатної енергії і розв'язати задачу про стаціонарні стани гармонічного осцилятора, скориставшись властивостями розв'язків ВГР. Знайти зв'язок між поліномами Ерміта і узагальненими поліномами Лаґерра.

7. Знайти коефіцієнти відбивання і проходження частинки з довільною енергією для параболічного потенціального бар'єра $U(x) = -m\omega^2 x^2/2$, звівши задачу до ВГР і користуючись властивостями його розв'язків. Побудувати розв'язок рівняння Шредингера в області $x > 0$ для випадку падіння частинки зліва, продовжити його на область $x < 0$ і знайти асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ і

$x \rightarrow -\infty$. Застереження: будьте уважні, визначаючи, яка із хвиль є падаючою, а яка відбитою. Вказівка: можна скористатись результатами попередньої задачі, формально звівши рівняння Шрединґера для бар'єра до рівняння для осцилятора переходом до комплексної координати.

1.3 Задачі на гіпергеометричну функцію

Теорія: [5], гл. 2, 3, [8].

8. Побудувати розв'язок рівняння Шрединґера, що відповідає проходженню частинки з енергією $E > U_0$ над сходиною $U(x) = \frac{U_0}{1 + \exp(x/a)}$. Знайти залежність коефіцієнтів проходження і відбивання від енергії і ширини сходинок. Дослідити граничні переходи до випадків різкої і плавної сходинок, а також до результатів задачі 1.

9. Монохроматичні світлові хвилі поширюються вздовж осі Ox у неоднорідному середовищі. Поширення хвиль описується рівнянням:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \left(k_0^2 - \frac{k_0^2 - k^2}{1 - e^{x/a} + i\eta} \right) E = 0,$$

де E – комплексна амплітуда електричного поля, $a > 0$, $\eta \rightarrow +0$, k і k_0 – параметри, $k_0 > k > 0$. Дослідіть вигляд розв'язків рівняння при великих від'ємних і великих додатних x і переконайтеся, що модель описує межу розділу двох однорідних середовищ з неоднорідною перехідною областю між ними. Знайти коефіцієнти відбивання R і проходження світлової хвилі, якщо хвиля падає на межу розділу середовищ а) зліва і б) справа. Порівняйте результати для випадків а) і б) і перевірте виконання рівності $R + T = 1$. Перевірте правильність результатів у граничних випадках різкого розділу середовищ і дуже плавної межі розділу середовищ. Поясніть результати фізично.

Фізично модель можна інтерпретувати наступним чином. Діелектричну проникність діелектрика в околі частоти окремого дипольного переходу, що лежить в області прозорості, можна подати у вигляді

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \right],$$

де ω_0 – частота переходу, ε_0 – фонова діелектрична проникність, ω_p – так зване поздовжно-поперечне розщеплення, $\omega_p \ll \omega_0$, γ – стала, що характеризує затухання відповідних електронних збуджень кристала. У задачі затухання

вважається нескінченно малим, $\gamma \rightarrow +0$. Якщо середовище однорідне, то закон дисперсії (зв'язок між частотою і хвильовим вектором) світлових хвиль у такому середовищі визначається рівнянням

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \right]$$

(нарисуйте графік залежності $\omega(k)$ для дійсних k). Область частот $\omega_0 < \omega < \omega_0 + \omega_p$, в якій $\varepsilon(\omega) < 0$, є областю непропускання середовища, а при $\omega > \omega_0 + \omega_p$ і $\omega < \omega_0$ світлові хвилі поширюються без затухання. Неоднорідність середовища створюється деяким потенціалом; це приводить до того, що частота переходу неперервно залежить від координати x : $\omega_0 \rightarrow \omega_0(x)$ і змінюється за законом $\omega_0(x) = \omega_0 + Ae^{x/a}$. У наведеному вище рівнянні для поля E

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon},$$

а саме рівняння відповідає випадку додатного потенціалу $A > 0$ і частоті $\omega > \omega_0 + \omega_p$, коли $k < k_0$; координата x у рівнянні відраховується від точки, яка відповідає умові резонансу $\omega = \omega_0(x)$.

10. Розв'язати попередню задачу для випадку від'ємного потенціалу $A < 0$ і частоти $\omega < \omega_0$ (відповідно, для $k > k_0$), коли поширення хвиль описується рівнянням

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \left(k_0^2 - \frac{k_0^2 - k^2}{e^{x/a} - 1 + i\eta} \right) E = 0.$$

11. Для квантово-механічної частинки, що рухається у потенціалі

$$U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)},$$

одержати обмежений при $x \rightarrow +\infty$ розв'язок рівняння Шрединґера для стаціонарних станів для довільної енергії в області дискретного спектра $-U_0 < E < 0$, користуючись заміною $\zeta = -e^{-2x/a}$, дослідити його асимптотику при $x \rightarrow -\infty$ і знайти рівні енергії та хвильові функції станів дискретного спектра з умови обмеженості розв'язку при $x \rightarrow -\infty$.

12. Для квантово-механічної частинки, що рухається у потенціалі

$$U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)},$$

отримати обмежений при $x \rightarrow +\infty$ розв'язок рівняння Шредингера для стаціонарних станів для довільної енергії в області дискретного спектра $-U_0 < E < 0$, користуючись замінами $\xi = \text{th}(x/a)$, $u = (1 - \xi)/2$, дослідити його асимптотику при $x \rightarrow -\infty$ і знайти рівні енергії та хвильові функції станів дискретного спектра з умови обмеженості розв'язку при $x \rightarrow -\infty$.

13. Для квантово-механічної частинки, що рухається у потенціалі

$$U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)},$$

отримати обмежений при $x \rightarrow +\infty$ розв'язок рівняння Шредингера для стаціонарних станів для довільної енергії в області дискретного спектра $-U_0 < E < 0$, користуючись заміною $\xi = \text{th}(x/a)$, рівнянням Лежандра і функціями Лежандра, дослідити його асимптотику при $x \rightarrow -\infty$ і знайти рівні енергії та хвильові функції станів дискретного спектра з умови обмеженості розв'язку при $x \rightarrow -\infty$.

14. Побудувати розв'язок рівняння Шредингера з потенціалом

$$U(x) = +\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)}, \quad U_0 > 0,$$

що відповідає проходженню частинки з енергією $E > 0$ через потенціальний бар'єр і над ним, знайти залежність коефіцієнтів проходження і відбивання від енергії, а також висоти і ширини бар'єра. Дослідити граничні переходи для коефіцієнтів до випадків δ -подібного, параболічного і плавного квазікласичного бар'єрів; сформулювати умови застосовності відповідних наближень.

15. Побудувати розв'язок рівняння Шредингера, що відповідає проходженню частинки з енергією $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ над потенціальною ямою

$$U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)}, \quad U_0 > 0,$$

і має асимптотику $\exp(ikx)$ при $x \rightarrow +\infty$. Знайти коефіцієнти проходження та відбивання та залежність амплітудних коефіцієнтів проходження та відбивання від k . Зробити аналітичне продовження розв'язку в область $E < 0$ і пересвідчитись, що стани дискретного спектра відповідають полюсам амплітудних коефіцієнтів проходження та відбивання, розташованим у верхній півплощині комплексної змінної k .

2 Спеціальні функції математичної фізики як розв'язки рівняння гіпергеометричного типу

2.1 Основні властивості спеціальних функцій

Вивчення спеціальних функцій із різноманітними властивостями, асимптотичними поведінками, розкладами в ряди і т.д. потребує знань багатьох спеціальних прийомів, що робить теорію спеціальних функцій складною для сприйняття і використання дисципліною. Підхід, що дозволяє розглядати всі спеціальні функції, використовуючи узагальнену формулу Родріга та інтегральну форму розв'язку відповідного диференціального рівняння, було запропоновано в книзі [3]. Цей метод дозволяє розв'язувати багато задач математичної фізики, що зводяться до диференціальних рівнянь гіпергеометричного типу, по єдиній схемі.

Будемо називати *рівнянням узагальненого гіпергеометричного типу* рівняння виду

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \quad (1)$$

$\tilde{\tau}(z)$ – поліном не вище першого порядку, $\sigma(z)$ і $\tilde{\sigma}(z)$ – поліномами не вище другого порядку. Рівняння (1) можна спростити і привести за допомогою заміни функції $u(z) = \varphi(z)y(z)$, що не змінює тип рівняння, до так званої *канонічної форми*

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \quad (2)$$

де $\tau(z)$ – поліном не вище першого порядку, $\lambda = \text{const}$. Послідовність дій, що дозволяє це зробити, представлено на наступній схемі.

Зауваження. 1) Якщо поліном σ має вигляд $\sigma(z) = (z - a)^2$, тобто має кратний корінь, то заміною змінної $s = (z - a)^{-1}$ рівняння приводиться до рівняння із $\sigma(s) = s$. 2) Якщо $\sigma(z) = 1$ і при цьому $(\tilde{\tau}(z)/2)^2 - \tilde{\sigma}(z)$ є поліномом першого порядку, то вихідне рівняння приводиться до рівняння $y'' + (az + b)y = 0$, що лінійною заміною змінної $s = az + b$ можна привести до так званого рівняння Ломмеля:

$$y'' + \frac{1 - 2\alpha}{s}y' + \left[(\beta\gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{s^2} \right] y = 0. \quad (3)$$

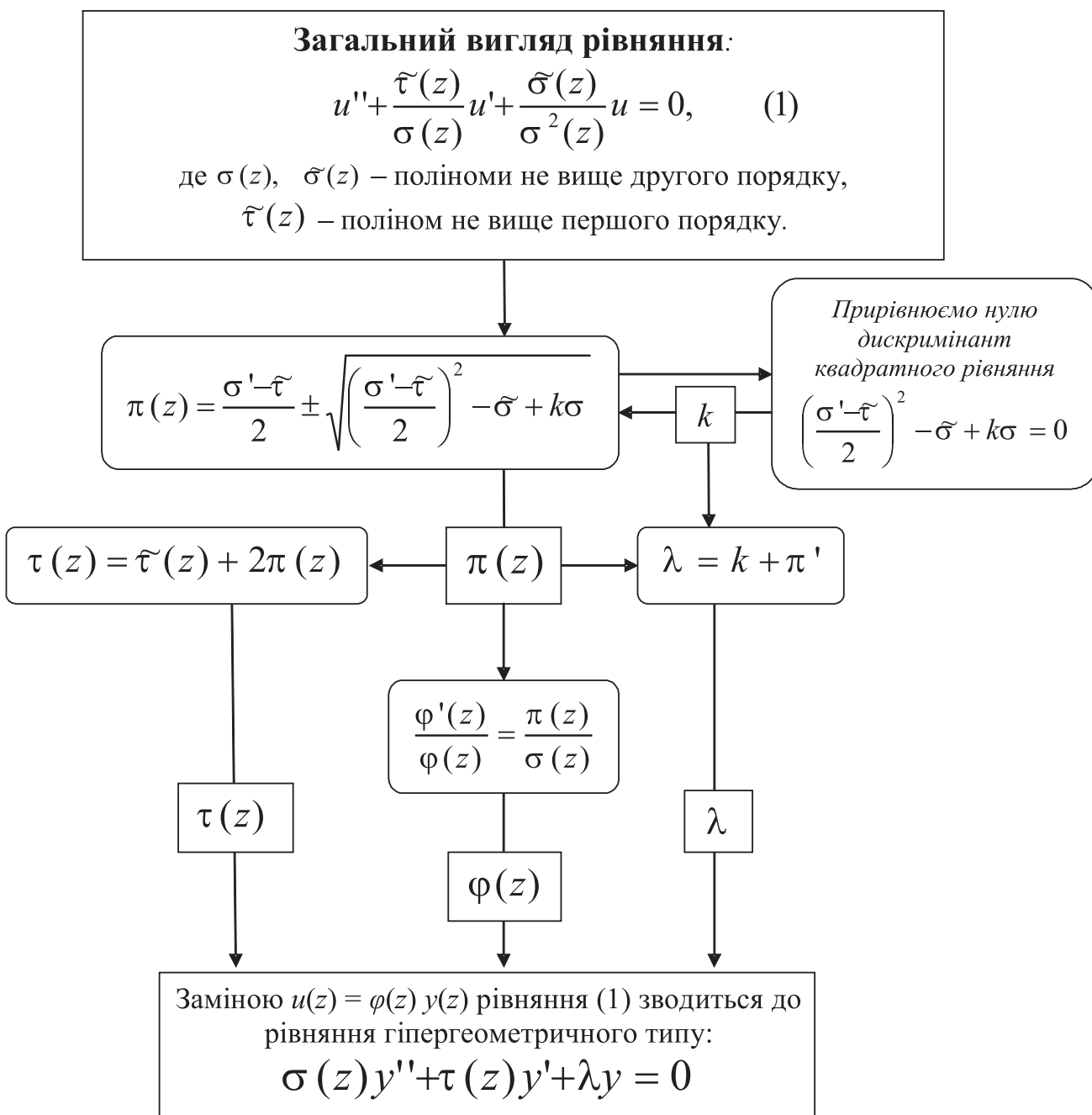


Рис. 1: Схема приведення диференціального рівняння узагальненого гіпергеометричного типу до канонічного вигляду.

Розв'язки цього рівняння виражаються через циліндричні функції $Z_\nu(s)$ порядку ν : $y(s) = s^\alpha Z_\nu(\beta s^\gamma)$. 3) Підстановку, що зводить рівняння до канонічної форми, часто також можна знайти, досліджуючи асимптотичну поведінку розв'язків в околі особливих точок.

При певному значенні константи λ :

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'', n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

рівняння (2) має розв'язки у вигляді поліномів. Ці розв'язки, що називають *поліномами гіпергеометричного типу*, можна представити у вигляді *формули Родріга*:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z)\rho(z)], \quad (5)$$

де функція $\rho(z)$, що може бути знайдена з рівняння $[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z)$, міститься у *спряженій формі* рівняння (2): $(\sigma\rho y)' + \lambda\rho y = 0$.

Класичними ортогональними поліномами називають поліноми гіпергеометричного типу $y_n(x)$, для яких функції $\sigma(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ задовільняють умові: $\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,b} = 0$, $a, b, k = 0, 1, \dots$

Варто зазначити, що для класичних ортогональних поліномів виконуються наступні вимоги до коефіцієнту $\tau(x)$ при першій похідній в канонічній формі (2) рівняння гіпергеометричного типу: (i) $\tau' < 0$, (ii) $\tau(x_0) = 0$, де $x_0 \in (a, b)$. Це правило дозволяє однозначно обирати знаки в формулі для поліному $\pi(x)$ в процесі приведення до канонічного виду.

Класичні ортогональні поліноми утворюють повний набір функцій на відповідному відрізку дійсної осі. Співвідношення ортогональності для класичних ортогональних поліномів має вигляд:

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx = \delta_{mn}d_n^2.$$

Класичні ортогональні поліноми поділяють на три типи:

- (i) *поліноми Якобі*: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, що у частинному випадку є *поліномами Лежандра*: $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$;
- поліномами Гегенбауера* (ультрасферичними поліномами):

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x);$$

поліномами Чебишева:

$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x),$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1).$$

(ii) поліноми Лаґерра $L_n^{(\alpha)}(x)$;

(iii) поліноми Ерміта $H_n(x)$.

Головні властивості класичних ортогональних поліномів наведено в таблиці.

	<i>Поліноми Якобі</i> $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	<i>Поліноми Лаґерра</i> $L_n^{(\alpha)}(x)$	<i>Поліноми Ерміта</i> $H_n(x)$
(a, b)	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$1 + \alpha - x$	$-2x$
λ_n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	n	$2n$
B_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{1}{n!}$	$(-1)^n$
a_n	$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n (n-1)! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^{n-1}(n+\alpha)}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n! \sqrt{\pi}$

Тут a_n і b_n – коефіцієнти при старших степенях поліному:

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

2.2 Задачі з теорії спеціальних функцій

16. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння гіпергеометричного типу:

(а) $x^2 y'' + xy' + (a^2 x^2 - \nu^2)y = 0$;

(б) $y'' + (2\varepsilon - x^2)y = 0$;

(в) $y'' + \left(\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} + \varepsilon\right)y = 0$. *Вказівка:* ввести нову змінну $s = \operatorname{th} \alpha x$.

17. Знайти твірну функцію для

(а) поліномів Лежандра;

(б) поліномів Ерміта;

(в) поліномів Лаґерра.

18. Довести формули диференціювання для класичних ортогональних поліномів:

(а) $\frac{dL_n^\alpha}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$;

(б) $\frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$;

(в) $\frac{dP_n^{(\alpha, \beta)}}{dx} = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}$.

19. Обчислити значення поліномів Лежандра $P_n(x)$ в точках $x = 0$, $x = 1$, та $x = -1$. Знайти $L_n^\alpha(0)$.

20. Знайти спадаючі на нескінченності розв'язки D -вимірного рівняння

$$\Delta_D u - a^2 u = f(\vec{r}).$$

Розглянути випадки $D = 2, 3, 4$.

21. Використовуючи твірну функцію для функцій Бесселя:

$$e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n J_n(x),$$

отримати інтегральне представлення для функції Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi.$$

22. Довести:

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}.$$

23. Знайти радіус збіжності та дослідити збіжність на кінцях радіусу збіжності

(а) гіпергеометричного ряду:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!};$$

(б) виродженого гіпергеометричного ряду:

$$F(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!},$$

де символ Похгаммера

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = a(a + 1) \dots (a + n - 1).$$

24. Довести формули диференціювання гіпергеометричної та виродженої гіпергеометричної функцій:

(а) $\frac{dF(\alpha, \beta; \gamma; z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 1; z);$

(б) $\frac{dF(\alpha; \gamma; z)}{dz} = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha + 1; \gamma + 1; z).$

25. Довести:

(а) $F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\beta, \alpha; \gamma; z),$

(б) $F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; z).$

26. Довести формулу перетворення Кумера: $F(\alpha; \gamma; z) = e^z F(\beta - \alpha; \beta; -z).$

27. Виразити через елементарні функції:

(а) $F(\alpha, 0; \gamma; z);$

(б) $F(\alpha, \beta; \beta; z);$

(в) $F(0; \beta; z);$

(г) $F(\alpha; \alpha; z).$

28. Довести, що поліноми Лежандра можна виразити через гіпергеометричну функцію за допомогою співвідношення: $P_n(z) = F(-n, n + 1; 1; \frac{1-z}{2}).$

29. Виразити через вироджену гіпергеометричну функцію

(а) приєднані функції Лежандра $P_l^m(x);$

(б) поліноми Ерміта $H_{2n+1}(x), H_{2n}(x);$

(в) поліноми Лагерра $L_n^{(\alpha)};$

(г) функції Бесселя $J_\nu(x).$

30. Обчислити інтеграли:

(а) $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^\rho dx;$

(б) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma, kx) dx, \lambda > 0;$

- (в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a > 0, b > 0;$
 (г) $\int_0^{+\infty} (x^2 + a^2)^{-\mu-1} x^{\nu+1} J_\nu(bx) dx, \quad -1 < \nu < 2\mu + \frac{3}{2}.$

31. Обчислити інтеграл Соніна-Гегенбауера:

$$\int_0^{+\infty} \frac{K_\mu(a\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx.$$

32. Перетворенням Ханкеля ν -го порядку називається інтегральне перетворення

$$\hat{F}(k) = \mathcal{B}_\nu\{f(r)\} = \int_0^{+\infty} f(r) r J_\nu(kr) dr,$$

що існує за умови абсолютної збіжності інтегралу $\int_0^{+\infty} f(r) dr$. Для неперервних функцій, при $\nu \geq -1/2$, обернене перетворення задається аналогічною формулою:

$$f(r) = \mathcal{B}_\nu^{-1}\{\hat{F}(k)\} = \int_0^{+\infty} \hat{F}(k) k J_\nu(kr) dk.$$

Довести наступні властивості перетворення Ханкеля:

$$(a) \mathcal{B}_\nu \left\{ f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} = -k^2 \mathcal{B}_\nu\{f(r)\};$$

$$(б) \int_0^{+\infty} k \mathcal{B}_\nu\{f(r)\} \mathcal{B}_\nu\{g(r)\} dk = \int_0^{+\infty} r f(r) g(r) dr.$$

33. Знайти спектральне зображення Ханкеля порядку ν функції $f(r)$:

(а) $f(r) = r^m e^{-a^2 r^2}, \quad \nu = m;$

(б) $f(r) = \frac{1}{r} e^{-ar}, \quad \nu = 0.$

34. Розв'язати крайову задачу методом функції Гріна:

$$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - \alpha^2 u(r) = f(r),$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(r)$ – задана функція, що спадає на нескінченності до нуля, так що інтеграл $\int_0^{+\infty} f(r) r dr$ – абсолютно збіжний.

35. Розв'язати попередню задачу за допомогою перетворення Ханкеля. Використовуючи отриманий результат обчислити інтеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(kx) J_0(kx')}{k^2 + \alpha^2} dk$$

36. Використовуючи перетворення Ханкеля, розв'язати крайову задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < \infty, t > 0, \\ |u(0, t)| < \infty, \\ u(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{1+r^2/b^2}}, \\ u_t(r, 0) = 0, \end{cases}$$

де a, A, b – константи.

37. Розв'язати задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u = 0, & 0 \leq r < \infty, t > 0, \\ u(\infty, t) = u_r(\infty, t) = u_{rr}(\infty, t) = u_{rrr}(\infty, t), \\ u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = 0. \end{cases}$$

38. Розв'язати інтегральні рівняння:

(а) $\int_0^\infty \varphi(t) J_0(xt) dt = e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

(б) $\int_0^\infty \varphi(t) J_m(xt) dt = x^m e^{-a^2 x^2}$.

39. Отримати розклад плоскої хвилі за циліндричними гармоніками (розклад Якобі-Ангера):

$$e^{ikr \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\varphi}.$$

40. Отримати розклад плоскої хвилі за поліномами Лежандра:

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

де $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$ – сферичні функції Бесселя.

41. Довести теорему додавання для сферичних функцій:

$$P_l(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2),$$

де $\cos \omega = (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$, одиничні \vec{n}_i вектори визначають напрямки в сферичних координатах (θ_i, φ_i) .

42. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для кулі:

$$\Delta u = 0, \quad u(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Отриманий ряд підсумувати за допомогою теореми додавання. Записати відповідь у вигляді квадратури.

2.3 Застосування теорії спеціальних функцій до задач квантової механіки

В квантовомеханічних задачах зведення стаціонарного рівняння Шредингера до рівняння гіпергеометричного типу дозволяє автоматично отримати і хвильову функцію і спектр енергії частинки в деякому потенціальному полі. При цьому відпадає потреба в дослідженні асимптотичної поведінки стаціонарного рівняння Шредингера, штучному обриванню гіпергеометричного ряду. Хвильова функція зв'язаного стану *автоматично* виражається через відповідні спеціальні функції, що домножені на функції, які задають правильну асимптотичну поведінку. Для багатьох потенціалів хвильова функція виражається через класичні ортогональні поліноми, що абсолютно не є випадковим збігом. Має місце наступна теорема (доведення можна знайти в [3], ст. 68):

Нехай (i) функція $y(x)$ задовольняє рівнянню гіпергеометричного типу (2), (ii) функція $\rho(x)$ задовольняє рівнянню $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, на інтервалі (a, b) є обмеженою та задовольняє умові на кінцях інтервалу: $\sigma\rho x^k|_{x=a,b} = 0$, ($k = 0, 1, \dots$)

Тоді нетривіальний розв'язок рівняння (2), що задовольняє умовам обмеженості та квадратичної інтегрованості функції $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на інтервалі (a, b) існують лише за умови (4). Тобто існують лише розв'язки у вигляді класичних ортогональних поліномів (5).

Приклад Знайти значення енергії та хвильові функції частинки, що рухається в полі лінійного гармонічного осцилятора $U(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$.

Запишемо рівняння Шредингера для даного потенціалу:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi''(x) + \frac{\mu\omega^2x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x),$$

де $x \in (-\infty, +\infty)$. Введемо безрозмірні змінні $\xi = x/a$, $\varepsilon = E/(\hbar\omega)$, де $a^2 = \hbar/(\mu\omega)$ і перепишемо рівняння Шредингера:

$$\psi''_{\xi\xi} + (2\varepsilon - \xi^2)\psi = 0.$$

Отримане рівняння заміною $\psi(\xi) = \varphi(\xi)y(\xi)$ приведемо до канонічної форми рівняння гіпергеометричного типу. Ототожнимо коефіцієнти рівняння, порівнюючи його із загальним виглядом рівняння (1): $\sigma(\xi) = 1$, $\tilde{\tau}(\xi) = 0$, $\tilde{\sigma}(\xi) = 2\varepsilon - \xi^2$. Діючи за схемою, розглянутою раніше, отримаємо вираз для поліному $\pi(\xi)$:

$$\pi(\xi) = \pm\sqrt{k - 2\varepsilon + \xi^2}.$$

Щоб знайти k , прирівнюємо до нуля дискримінант підкореневого виразу: $D = -4(k - 2\varepsilon) = 0 \Rightarrow k = 2\varepsilon$. Тобто, $\pi(\xi) = \pm\xi$,

$$\tau(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) + 2\pi(x) = \pm 2\xi.$$

Виберемо знак таким чином, щоб поліном $\tau(\xi)$ мав від'ємну похідну: $\tau(\xi) = -2\xi$, при цьому виконується також і умова наявності кореня поліному: $\tau(\xi_0) = 0$ при $\xi_0 = 0$. Таким чином, для поліному $\pi(\xi)$ остаточно отримаємо: $\pi(\xi) = -\xi$. Далі підставляємо цей вираз в формули для $\tau(\xi)$, λ і в рівняння для функції $\varphi(\xi)$

$$\tau(\xi) = -2\xi; \lambda = k + \pi'(\xi) = 2\varepsilon - 1; \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)} \Rightarrow \varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

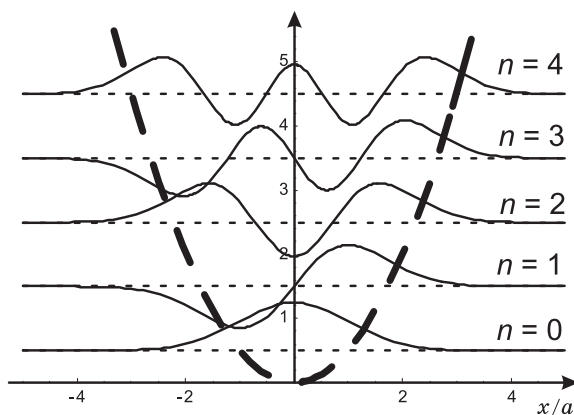


Рис. 2: Потенціал лінійного гармонічного осцилятора у безрозмірних змінних $U(x/a)/(\hbar\omega) = \frac{1}{2}(x/a)^2$ (пунктирна лінія) та хвильові функції $\psi_n(x/a)$ станів $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (суцільні лінії). Для зручності на графіку представлені функції $y(x) = \sqrt{a}\psi_n(x/a) + n + 1/2$.

Отже, отримаємо рівняння гіпергеометричного типу в канонічній формі:

$$y''_{\xi\xi} - 2\xi y'_{\xi} + (2\varepsilon - 1)y = 0.$$

Рівні енергії знаходимо з умови існування поліноміальних розв'язків (в цьому випадку хвильова функція задовольняє умові квадратичної інтегровності):

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0 \Rightarrow \varepsilon_n = n + 1/2.$$

Використовуючи рівняння $[\sigma(\xi)\rho(\xi)]' = \tau(\xi)\rho(\xi)$, знаходимо функцію $\rho(\xi) = e^{-\xi^2}$. Хвильові функції можна записати, використовуючи формулу Родріга:

$$\psi_n(\xi) = \frac{B_n}{\rho(\xi)} \frac{d^n}{d\xi^n} [\sigma^n(\xi)\rho(\xi)] = B_n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

Помічаємо, що цей вираз з точністю до множника співпадає з поліномом Ерміта. Повертаючись до старих змінних, отримуємо:

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\frac{1}{2}(x/a)^2} H_n(x/a), E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Константу нормування C_n знаходимо з умови

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! a \sqrt{\pi}}},$$

де використано співвідношення ортогональності для поліномів Ерміта:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Використовуючи описаний метод розв'язати наступні квантово-механічні задачі:

43. Знайти значення енергії та власні функції частинки, що рухається в полі з потенціалом $U(x)$:

(а) $U(x) = -U_0/\text{ch}^2 \alpha x$, $U_0 > 0$ – потенціал Пешля-Теплера;

(б) $U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, $U_0 > 0$ – потенціал Морзе.

44. Знайти значення енергії і хвильові функції стаціонарного стану двовимірному осцилятора в полярних координатах: $U(r) = \mu\omega^2 r^2/2$. Обчислити середньо-квадратичний радіус гармонічного осцилятора: $\langle r^2 \rangle = \langle \psi | r^2 | \psi \rangle$.

45. Знайти спектр енергій ($0 < E < 1$) та хвильові функції задачі з рівнянням Клейна-Гордона:

$$\Delta\psi + \left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 - 1 \right] \psi = 0$$

46. Використовуючи квазікласичне наближення отримати асимптотичну формулу для поліномів Лежандра при $n \gg 1$:

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos((n + 1/2)\theta - \pi/4)}{\sqrt{\sin \theta}}.$$

47. Знайти в квазікласичному наближенні рівні енергії частинки, що рухається в полі $U(x) = \mu\omega^2 x^2/2$ (лінійний гармонічний осцилятор).

48. Знайти в квазікласичному наближенні рівні енергії електрона в кулонівському полі $U(r) = -\alpha/r$.

49. Обчислити електростатичний потенціал, що створюється в заданій точці простору воднеподібним атомом. Розглянути випадок, коли електрон знаходиться в основному стані. Показати, що на великих відстанях від атому потенціал $V(r) \sim (Z - 1)/r$, де Z - заряд ядра.

3 Додаток

3.1 Гамма-функція Ейлера

Означення:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0.$$

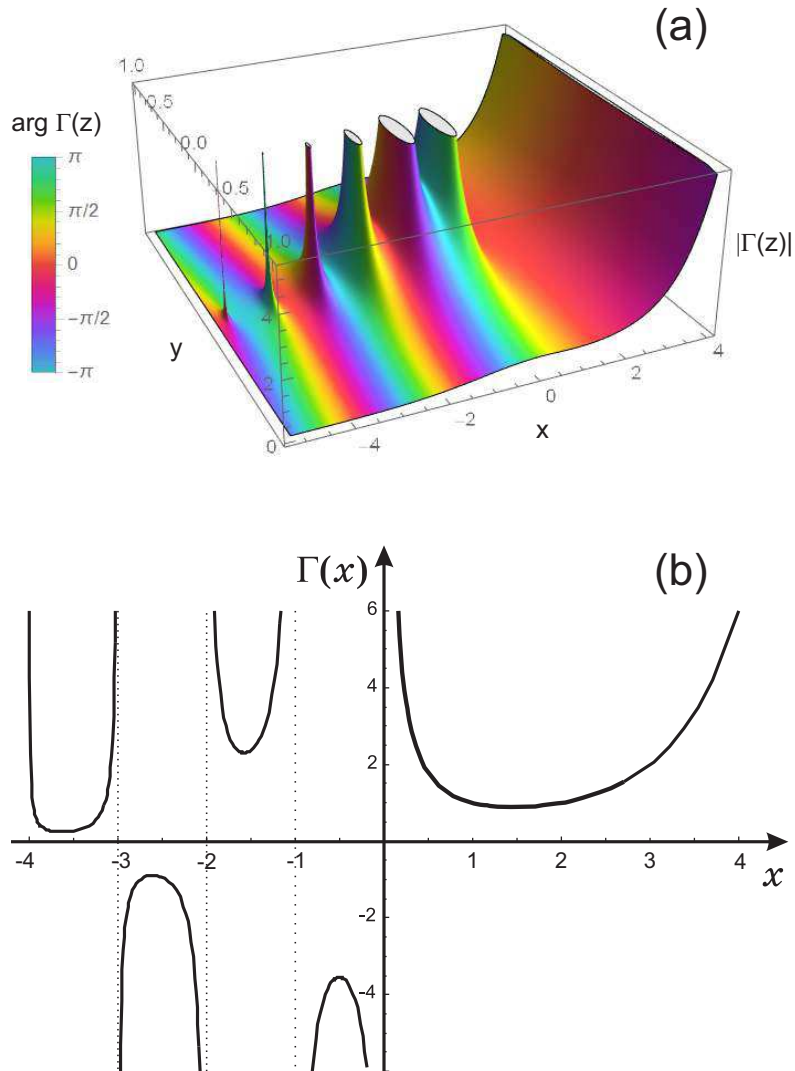


Рис. 3: Графік гамма-функції Ейлера $\Gamma(z)$: (a) Модуль $|\Gamma(z)|$ в комплексній площині $z = x + iy$. Кольором показано фазу $\arg \Gamma(z)$ гамма-функції комплексного аргументу. (b) $\Gamma(x)$, на дійсній осі.

Властивості:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}; \quad 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Частинні значення:

$$\Gamma(1) = 1; \Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Особливі точки: прості полюси $z = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Інтегральне представлення Ханкеля в усій комплексній площині

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t-t^z} dt, \quad |z| < \infty.$$

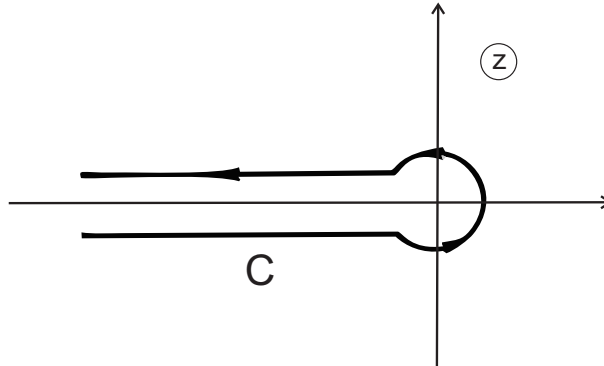


Рис. 4: Контур у формулі інтегрального представлення Ханкеля.

3.2 Поліноми Лежандра

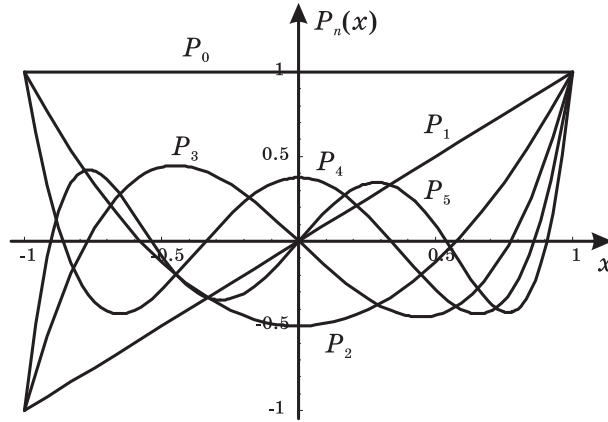


Рис. 5: Графіки поліномів Лежандра $P_n(x)$.

Диференціальне рівняння для поліномів Лежандра:

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + l(l + 1)u = 0$$

Формула Родріга:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \delta_{lm}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$x(2l + 1)P_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

Асимптотична поведінка для великих значень порядку:

$$P_l(\cos \theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\sin[(l + 1/2)\theta + \pi/4]}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad l|\sin \theta| \gg 1.$$

3.3 Поліноми Лаґерра

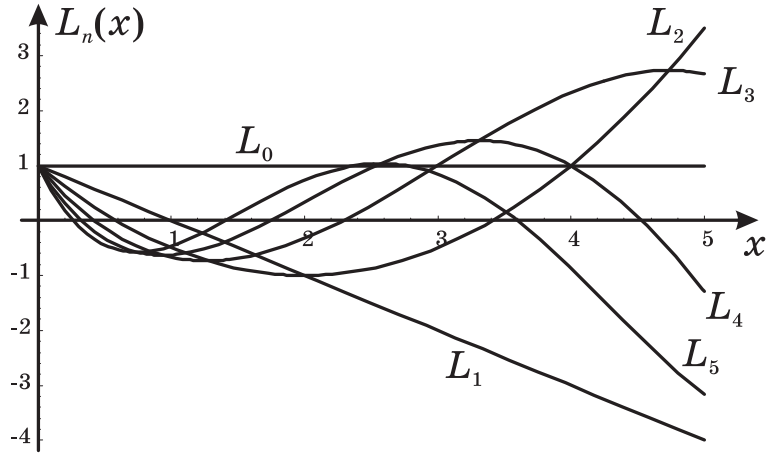


Рис. 6: Графіки поліномів Лаґерра $L_n(x) = L_n^0(x)$.

Диференціальне рівняння для поліномів Лаґерра $L_n^\alpha(x)$:

$$xu'' + (1 + \alpha - x)u' + nu = 0.$$

Формула Родріґа:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}).$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x, \quad L_2^\alpha(x) = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{x^2}{2}.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{nm}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$(n + 1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x) + (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$

Крайова задача, розв'язки якої виражаються через поліноми Лаґерра

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{4} \left(2\lambda - x - \frac{\alpha^2}{x} \right) u = 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

$\alpha \geq 0$, $|u(x)| < \infty$, при $x \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \infty$. Умова існування нетривіального розв'язку $\lambda - (2n + \alpha + 1) = 0$. Нетривіальний розв'язок: $u_n(x) = x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^\alpha(x)$.

3.4 Поліноми Ерміта

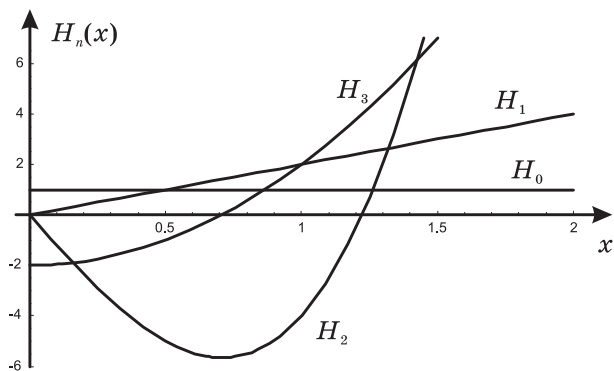


Рис. 7: Графіки поліномів Ерміта $H_n(x)$.

Диференціальне рівняння для поліномів Ерміта:

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0.$$

Формула Родріга:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

3.5 Циліндричні функції

Рівняння Бесселя:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Узагальнений степеневий ряд для функції Бесселя:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Рекурентні співвідношення для функцій Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x), & 2J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \\ \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] &= x^\nu J_{\nu-1}(x), & \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Інтегральне представлення:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - i\nu \varphi} d\varphi - \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sh} t - \nu t} dt.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_0^l x J_\nu(\alpha_m x/l) J_\nu(\alpha_n x/l) dx = \delta_{nm} \frac{l^2}{2} \{ J'_\nu{}^2(\alpha_n) + (1 - \nu^2/\alpha_n^2) J_\nu^2(\alpha_n) \},$$

де $\{\alpha_k\}$ – корені одного з рівнянь:

- (а) $J_\nu(\alpha) = 0$,
- (б) $J'_\nu(\alpha) = 0$,
- (в) $\alpha J'_\nu(\alpha) + h J_\nu(\alpha) = 0$.

$J_0(\alpha) = 0$: $\alpha_1 = 2.405$, $\alpha_2 = 5.52$, $\alpha_3 = 11.792$;

$J_1(\beta) = 0$: $\beta_1 = 3.832$, $\beta_2 = 7.016$, $\beta_3 = 10.174$.

Асимптотична поведінка при $x \rightarrow +\infty$:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad N_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})},$$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_\nu(x) = i^{\nu+1} \frac{\pi}{2} H^{(1)}(ix) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

Асимптотична поведінка при $x \rightarrow +0$:

$$J_\nu(x) \simeq x^\nu, \nu \geq 0, \quad N_\nu(x) \simeq 1/x^\nu, \nu > 0, \quad N_0(x) \simeq -\ln x,$$

$$I_\nu(x) = x^\nu, \nu \geq 0, \quad K_\nu(x) \simeq 1/x^\nu, \nu > 0, \quad K_0(x) \simeq -\ln x.$$

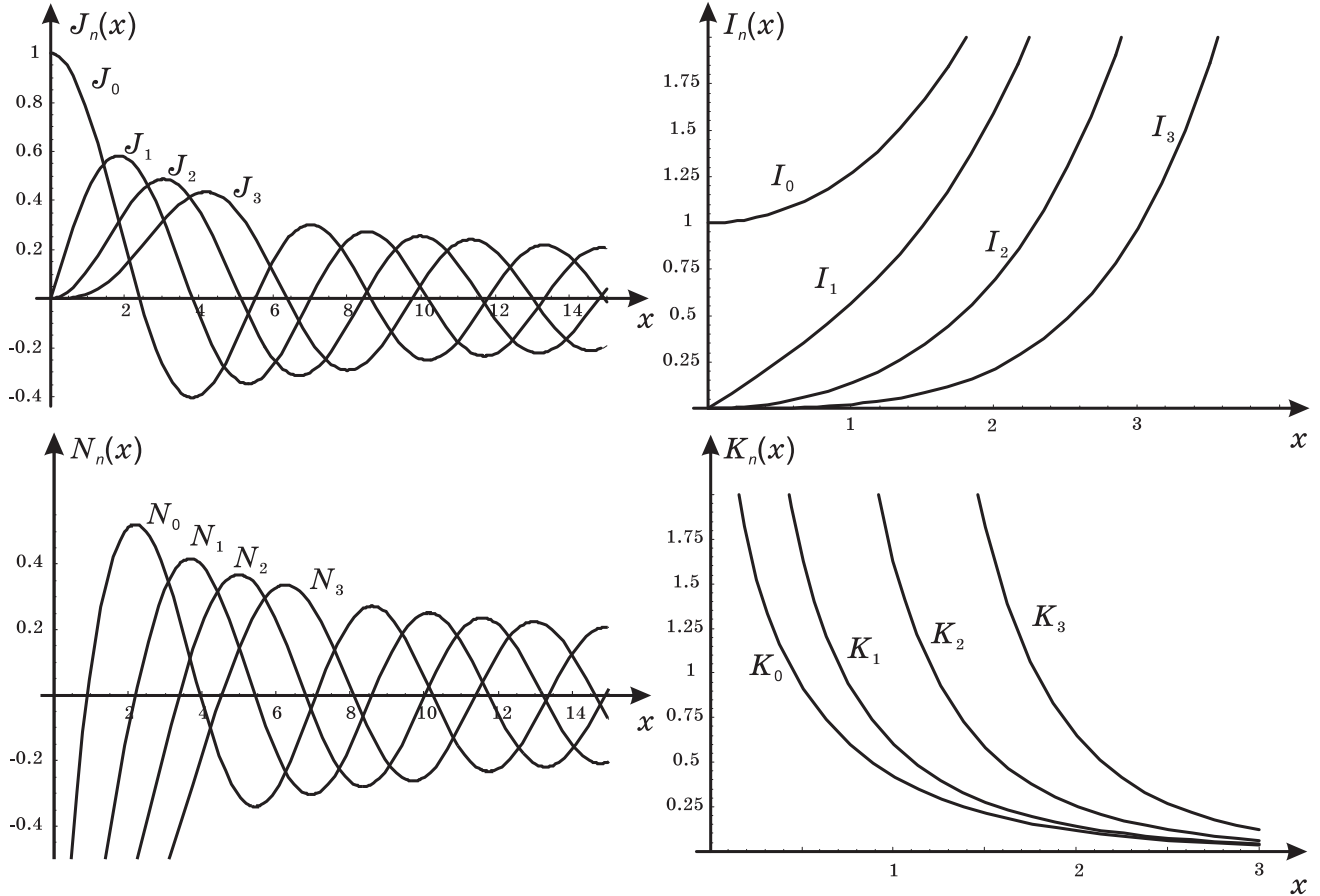


Рис. 8: Графіки функцій Бесселя $J_n(x)$, $N_n(x)$ і модифікованих функцій Бесселя $I_n(x)$, $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

3.6 Гіпергеометрична функція

Гіпергеометричне рівняння

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0$$

Інтегральне представлення для $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-zt)^{-\beta} dt,$$

Гіпергеометричний ряд:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

де

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1).$$

Частинні випадки:

$$F(\alpha, \gamma; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{z^n}{n!}, \quad F(1, \gamma; \gamma; z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

Аналітичне продовження гіпергеометричного ряду (кожен із членів у правій частині є розв'язком гіпергеометричного рівняння):

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1-z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z), \quad |\arg(1-z)| < \pi; \\ F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{z}\right), \quad |\arg(-z)| < \pi. \end{aligned}$$

Тут $\alpha + \beta - \gamma$ і $\alpha - \beta$ не є цілими числами.

Представлення різних функцій через гіпергеометричну функцію:
Поліном Лежандра:

$$P_n(z) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right).$$

Повний еліптичний інтеграл першого і другого роду:

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right), \quad E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; z^2\right).$$

3.7 Вироджені гіпергеометричні функції

Вироджене гіпергеометричне рівняння:

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0.$$

Вироджена гіпергеометрична функція, інтегральне представлення:

$$F(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt, \quad \operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

Вироджений гіпергеометричний ряд:

$$F(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!}, \quad |z| < \infty$$

Частинні випадки: $F(0; \gamma; z) = 1$, $F(\alpha; \alpha; z) = e^z$.

Представлення різних функцій через вироджену гіпергеометричну функцію:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F(-n; 1 + \alpha; z),$$
$$I_\nu(z) = e^{-z} F\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2z\right).$$

3.8 Інтегральні перетворення

3.8.1 Перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Перетворення частинних похідних по часу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq p U(x, p) - u(x, 0),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}.$$

$F(p)$	$f(t) \quad (t > 0)$
$\frac{1}{p^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{ch}(at)$
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{at} \sin(bt)$
$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$
$\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{p}{a}$	$\frac{\sin(at)}{t}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+p^2}}$	$J_0(at)$

3.8.2 Перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$F(\omega)$	$f(t)$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega a)}{\omega}$	1, якщо $ t \leq a$; 0, якщо $ t > a$
$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	e^{-at^2}
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2}$	$e^{-a t }$
$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a \omega }$	$\frac{1}{a^2+t^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(a\omega)$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}$, якщо $ t < a$; 0, якщо $ t > a$
$i^n \pi^{-1/2} J_{n+1/2}(\omega)$	$P_n(t)$, якщо $ t < 1$; 0, якщо $ t > 1$

3.8.3 Перетворення Ганкеля

$$F(k) = \mathcal{B}_m\{f(r)\} = \int_0^{+\infty} f(r)rJ_m(kr)dr,$$

$$f(r) = \mathcal{B}_m^{-1}\{F(k)\} = \int_0^{+\infty} F(k)kJ_m(kr)dk.$$

$F(k)$	m	$f(r)$
$\frac{a^m}{k}J_{m+1}(ka)$	$m > -1$	r^m , якщо $0 < r < a$; 0 , якщо $r > a$
$\frac{\Gamma(\frac{m+\mu}{2})(\frac{k}{2a})^m}{2\Gamma(m+1)a^\mu}F\left(\frac{m+\mu}{2}, m+1, -\frac{k^2}{4a^2}\right)$	$m > -1$	$r^{\mu-2}e^{-a^2 r^2}$
$\frac{1}{k}e^{-ak}$	$m = 0$	$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$
e^{-ak}	$m = 0$	$\frac{a}{\sqrt{(r^2+a^2)^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-k^2}}$, якщо $0 < k < a$	$m = 0$	$\frac{\sin ar}{r}$
0 , якщо $k > a$;		

Список літератури

- [1] Сидоров Ю. В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1967.
- [3] Никифоров А.Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. -М.: Наука, 1984. -344 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т.III. Квантовая механика (нерелятивистская теория).-М.: Физматлит. 2002.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1967.
- [6] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
- [7] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 839 с.
- [8] Хотяїнцев В. М. Методи математичної фізики, для студентів фізичного факультету (електронний конспект лекцій). Київ, 2021.
- [9] Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики, -М.: Эдиториал УРСС, 2000. -288 с.
- [10] Доценко І.С. Рівняння Бесселя та його розв'язки, Навч. посібн. - К. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет - 2002. -30 с.